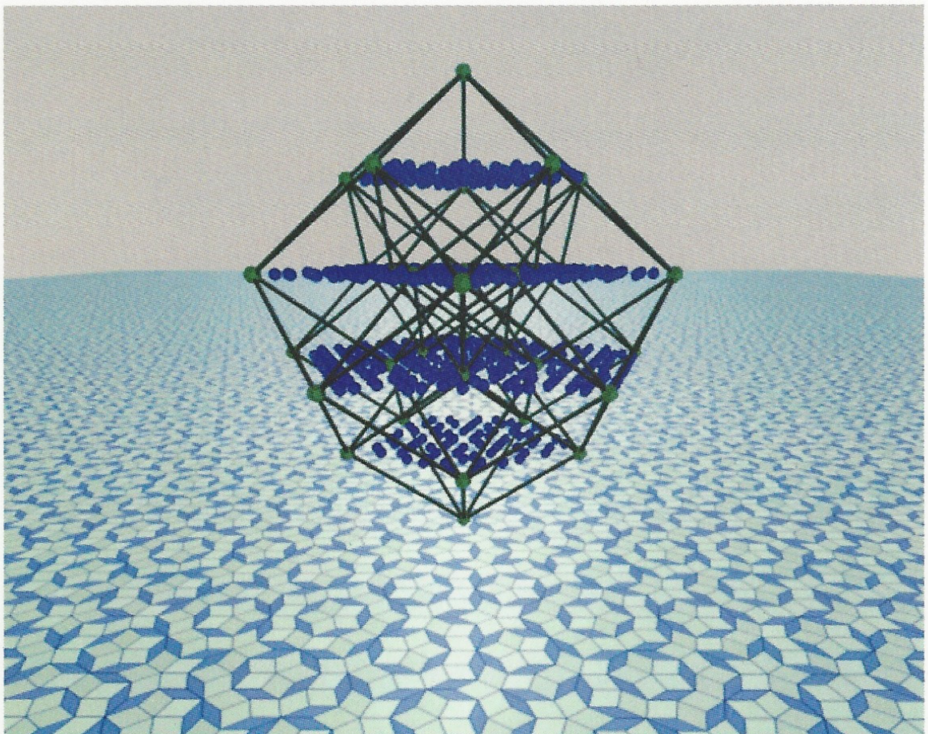
MATTEO FOGALE – EMANUELE PAOLINI

UNE INTRODUZION AE ANALISI MATEMATICHE

Jentrade di Sergio Cecotti



ISTITÛT LADIN FURLAN
"Pre Checo Placerean"
2001

Ai students, ai docents e al personâl dal
Liceu Sientific "Magrini" di Glemone
e, in particolâr, a
Paola, Adriano, Marco C., Stefano, Ferdy,
Federico, Alessandro, Marco R., Giulia,
Riccardo, Mara, Dario, Ivan, Alexa e Linda
(5B dal 1999/2000).
Sperant che mi perdonin par vêur
dedicât un libri di matematiche...

Cuviertine: *Penrose by Quasitiler* di Eugenio Durand,
dal archivi dal “University of Minnesota Geometry Center”
(sît web: www.geom.umn.edu).

Istitût ladin furlan “Pre C.Placerean”
33033 Çupicje di Codroip (UD)

Chest libri al è stât stampât
cul contribût de Regjon Autonome Friûl-Vignesie Julie
e cu la poie de Societât Sientifiche e Tecnologjiche Furlane.

Stampât in Friûl
Aziende Grafiche Zanetti - 33033 Codroip (UD)
Jugn 2001

Matteo Fogale – Emanuele Paolini

UNE INTRODUZION AE ANALISI MATEMATICHE

Jentrade di Sergio Cecotti

Istitût ladin furlan
“Pre Checo Placerean”
2001

Jentrade

Dai timps di Josef Marchet i furlans a àn smirât a transformâ la lôr fevele, il furlan, intune lenghe di ûs normâl in dutis lis situazions de vite moderne, fasintle jentrâ ancje tai setôrs plui specializâts e slargjantle ai regjistris plui "alts" de comunicazion inteletuâl: sience, filosofie, teologjie. Daspò la aprovazion des leçs statâl e regjonâl su la tutele dal furlan, cheste volontât di "normalizazion" (in sens catalan) e je deventade la politiche lenghistiche uficiâl des Instituzions furlanis, almancul a nivel teoric. Chest al vûl dî, in particulâr, la introduzion dal furlan tes scuelis - de materne fin a l'universitât - tant che lenghe di insegnament. Chest al varès di puartâ, cul timp, i insegnants a fevelâ par furlan ai lôr arlêfs di sience, leteradure, filosofie, e di sepi Diu ce, e dut chest come fat curiculâr, al ven a stâi *normâl*.

Par rendi chest meracul possibil a coventin une serie di azions preventivis:
a) indotâ la lenghe furlane dai regjistris sientifics e, in specific, introdusi il lessic tecnic de matematiche, de fisiche, de biologjie;
b) formâ i insegnants;
c) prontâ i supuarts didatics: i libris ma ancje i imprescj informatics;
d) meti dongje une leteradure sientifiche, sei divulgative che di ricercje, par furlan.

In chestis direzions alc si è za mot; ancjemò pôc ma il procès al è inviât. O vin il lavôr su la nomencladure di diviersis dissiplinis, sientifichis e no (ativitât là che si distint l'Istitût Ladin Furlan *"Pre Checo Placerean"*). O vin ca e là cualchi articulut che al trate, a nivel divulgatîf, di arguments sientifics. In fin o vin un prin libri sientific dut te nestre lenghe: *"Il cjâf dai furlans"* dal innomenât neurolenghist Franc Fari. Pôc e nuie, ma o vin di visâsi che la sience par furlan e je une ativitât cuntune storie une vore resinte; si pues dî che e à ancjemò di partî in maniere sistematiche. Chest Zenâr un trop di furlans si son dâts dongje te Societât Sientifiche e Tecnologjiche Furlane (SSTeF) par dâ une sbruntade in cheste direzion.

Vuê o vin il plasê di saludâ la publicazion di un secont libri sientific scrit par furlan *"Une introduzion ae analisi matematiche"* di E. Paolini e M. Fogale. Si trate di un test preciôs par plusôrs resons. Intant al è il prin libri di matematiche stampât par furlan. Si trate di un "vêr" libri di matematiche, no di un test divulgatîf. Par consecuence il libri al dopre il stîl rigorôs, sut e "economic" tipic dal lengaç matematic. Un stîl une vore formalizât, fat di secuencis logjichis di definizions, proposizions, lemis e teoremis, là che ogni peraule e à une sô valence tecniche definide, e nissune peraule e je di masse. Pe lenghe furlane si trate de concuiste di un regjistri lenghistic gnûf, il plui formâl e astrat che al sei, e duncje ancje de dimostrazion pratiche che la lenghe e pues jonzi cualsisei regjistri.

Secont: si trate di un test didatic svelt, util par imparâ l'analisi matematiche o par cirî fûr un teoreme cuant che al covente. Un test che al pues jessi doprât dai students dai ultins agns dal liceu - o ancje a l'inizi de universitât - par studiâ l'analisi matematiche cun facilitât, cence pierdi nuie rispiet a un test tune cualsisei altre lenghe. Al è ancje un libri fortunât, tal sens che al jes tal moment just, propit cuant che al tache a coventâ.

Tierç: l'analisi matematiche e je une materie no dome fondamentâl, ma ancje strumentâl par cuasi dutis lis altris dissiplinis sientifichis e tecnichis (la fisiche, l'inzegnerie, e vie indenant). Cun chest libri Paolini e Fogale a àn butadis jù lis fondis par fevelâ par furlan di dutis chestis materiis.

Il titul dal libri *"Une introduzion ae analisi matematiche"* al pant la nature (e l'ambizion) dal libri. Si trate di un libri che al introdûs a la materie, esplicant i concets, i metodis, i esemplis e i risultâts fondamentâi, lassant a seguitîfs profondiments i risultâts di nature plui specializade. Pi di mancul si trate di un libri rigorôs e ben construît, cuntune impostazion moderne e direte. Un test ancje complet (tai limits des finalitâts che i autôrs si son dâts). In sumis, un libri che al sta a pâr cui miôr tescj de sô categorie.

Il fat di jessi une introduzion, e di jessi dut somât un test curt, al è un avantaç. No dome par vie che al pues jessi consultât tant che riferiment rapit, ma soredut parcè che al pues jessi doprât di une platee une vore largje di utilizadôrs e duncje al pues judâ cetant l'afermâsi de nestre lenghe sicu lenghe sientifiche. Tal construî une leteradure sientifiche par furlan, al rione partî di tescj sientifics cuntun potenziâl di letôrs il plui larc possibil. La sielte fate dai nestris doi autôrs e je, cence fal, la miôr possibile sot chest aspiet. Al coventarès in curt ancje un test di gjeometrie gjenerâl e/o algjebre lineâr; o invidi i ben intenzionâts a scrivilu.

Par dutis chestis resons, i furlans - almancul chei che a àn interès sientifics - a scuegnin jessi agrâts a Paolini e Fogale pe vore fate. Al reste ancjemò un cantin di frontâ, chel plui problematic. O vin dit che chest libri - propit pe sô fondamentalitât - al bute lis fondis dal lengaç sientific furlan no dome te matematiche. Al è destin che cui che al scrîf par prin di une materie intune lenghe al fisse no dome la relative nomencladure, ma al definìs ancje il sens tecnic precîs des peraulis (un lengaç tecnic al è diviers de lenghe di ogni dì propit parcè che lis peraulis a àn significancis definidis; peraulis che a son sinonims tal ûs corint no lu son tal ûs tecnic). Chest, potenzialmentri, al varès di sucedi ancje cun chest libri. Lis soluzions dopradis dai autôrs sono simpri lis miôrs possibilis? No lu sai. Cualchi viaç lis lôr sieltis a son disferentis di chês racomandadis tal libri *"La nomencladure des matematichis"* di De Clara, Mitri, Pittana. In font si trate nome di convenzions. Dut câs su chescj aspiets convenzionâi bisugnarà metisi d'acuardi in curt. O pûr si à di sperâ tune produzion sientifiche par furlan avonde bondante e cualificade di cjatâsi cun des sieltis che si imponin cu la fuarce de cuantitât e cualitât de leteradure tecniche che lis adote. Sperìn ben.

Sergio Cecotti
VicePresident de SSTeF

Preambul

"Il distin dai popui al è mistereôs. No si sa ni cuant che a nassin, ni cuant che a muerin, Chest al parten al misteri di Diu e de storie. Nô però o podìn, o scugnìn metile dute par restâ vîfs, par jessi atôrs, sogjets, protagoniscj de nestre storie..." (Antoni Beline)

Une introduzion ae analisi matematiche al è un progjet che al nas cun dôs finalitâts: di une bande al è un lavôr di didatiche de matematiche, di chê altre al è ancje un lavôr di ricercje terminologjiche su la lenghe furlane. Il test al è pensât principalmentri par students universitaris e al fronte in mût sintetic i arguments fondamentâi di un prin cors di analisi matematiche. Ae fin di ogni cjapitul si cjate ancje une piçule racuelte di esercizis. Dal pont di viste terminologjic, o vin tignût come riferiment i lavôrs sul lessic de matematiche che a son citâts tes notis bibliografichis ae fin dal libri. In cualchi câs, però, o vin sielzût des soluzions diferentis parcè che nus àn parût plui funzionâls e doprabilis. Chest al è stât simpri fat su la fonde di esperiencis reâls di didatiche in lenghe furlane. O sperìn che il nestri lavôr al sedi util.

Pagnà, ai 6 di Mai dal 2001.

Tabele

Cjapitul 1

Spazis metrics e topologjics

1.1 Spazis topologjics

Definizion 1.1 *Considerìn un insiemit*[1] X *no vueit e une classe* τ *di sotinsiemits di* X. *La cubie* (X, τ) *e ven clamade* spazi topologjic *se e dome se a valin lis propietâts seguintis:*
1) X *e l'insiemit vueit i partegnin a* τ,
2) l'union infinide di elements di τ *i parten ancjemò a* τ,
3) l'intersezion finide di elements di τ *i parten ancjemò a* τ.
τ *e ven clamade* topologjie *sul spazi topologjic* X *e i siei elements a son clamâts* insiemits vierts *(o plui semplicementri vierts) di* X.

Definizion 1.2 *Che al sedi* X *un spazi topologjic e* S *un so sotinsiemit. Se il complementâr di* S *in* X *al è viert alore* S *si dîs* sierât *di* X.

Definizion 1.3 *Che al sedi* X *un spazi topologjic. Se par ogni cubie di elements distints* a *e* b *di* X *a esistin doi vierts* A *e* B *di* X *che a àn intersezion vueide e tâi che* $a \in A$ *e* $b \in B$, X *si dîs* spazi topologjic di Hausdorff.

Definizion 1.4 *Che al sedi* X *un spazi topologjic,* p *un element di* X. *Un insiemit* W *si dîs* circondari[2] *di* p *se al esist un viert* V *che al conten* p *e che al è contignût di* W.

Definizion 1.5 *Che al sedi* X *un spazi topologjic,* I *un so sotinsiemit e* x *un element di* I. *Si dîs che* x *al è un* pont di acumulazion di I *se cualsisei circondari di* x *al conten un pont di* I *diferent di* x.

[1] par inglês: *set.* Altris propuestis par chest tiermin a son *intune* [NM], *adune* [L2000].
[2] par inglês: *neighbourhood.* Par italian: *intorno.* Cheste soluzion si le cjate in [L2000].

Definizion 1.6 *Che al sedi X un spazi topologjic, I un so sotinsiemit e x un element di X. Si dîs che x al è un* pont aderent *di I se ogni so circondari al conten almancul un pont di I.*

Definizion 1.7 *Che al sedi X un spazi topologjic, I un so sotinsiemit e x un element di X. Si dîs che x al è un* pont interni *di I se al esist un so circondari che al è contignût di I.*

Definizion 1.8 *Che al sedi X un spazi topologjic e V un so sotinsiemit. L'insiemit $\bar{V}$ formât di ducj i ponts aderents di V al è clamât* clusure[3] *di V in X.*

Definizion 1.9 *Che al sedi X un spazi topologjic e V un so sotinsiemit. L'insiemit formât di ducj i ponts internis di V al è clamât* part interne di V in X.

Proposizion 1.10 *Che al sedi X un spazi topologjic e V un so viert. Alore V al coincît cun l'insiemit dai siei ponts internis.*

Dimostrazion:
Al è clâr che se p al è un pont interni a V alore p i parten a V. Di chê altre bande se p i parten a V, alore V al è un circondari di p.

□

Proposizion 1.11 *Che al sedi X un spazi topologjic e S un so sierât. Alore S al coincît cul insiemit dai siei ponts aderents.*

Dimostrazion:
Al è clâr che se p i parten a S alore p al è un pont aderent di S. Di chê altre bande che al sedi p un pont aderent di S e metìn par assurt che p no i partegni a S. Alore p i parten al complementâr di S che al è un viert e duncje p al è un pont interni dal complementâr di S par chel che o vin za dit. Duncje al esist un circondari di p (il complementâr di S) che nol interseche S e chest al va cuintri de ipotesi di p aderent a S.

□

Proposizion 1.12 *Che al sedi X un spazi topologjic e V un so sotinsiemit. La clusure $\bar{V}$ di V in X e je un sierât.*

[3]par inglês: *closure*, la soluzion propueste in [L2000] e je *cludidure*.

Dimostrazion:
Al baste fâ viodi che il complementâr di $\bar{V}$ in X al è viert. $\bar{V}^c$ e ten dentri ducj e dome chei elements a di X che a àn un circondari V_a che al à intersezion vueide cun V. L'insiemit

$$I = \bigcup_{a \in \bar{V}^c} V_a$$

al conten $\bar{V}^c$ e in plui e al è viert parcè che al è union di vierts. Di chê altre bande I al è ancje contignût di $\bar{V}^c$, parcè che ogni V_a al è contignût di $\bar{V}^c$. Di fat, par vie che V_a al è viert, par ogni pont p di V_a al esist un circondari di p che al è contignût in V_a. Duncje al salte fûr pulît che p no i parten a $\bar{V}$.

□

Par vie che il complementâr de clusure di un insiemit cualsisei al coincît cun la part interne dal complementâr, al ven pulît che e vâl ancje la seguint.

Proposizion 1.13 *Che al sedi X un spazi topologjic e V un so sotinsiemit. La part interne di V in X e je un viert.*

Definizion 1.14 *Che al sedi (X, τ) un spazi topologjic e A un sotinsiemit di X. La classe di insiemits $\tau_A = \{B \cap A \,|\, B \in \tau\}$, si dîs* topologjie indusude *di X sore A.*

Si pues di fat viodi cun facilitât che la cubie (A, τ_A) e je un spazi topologjic.

Definizion 1.15 *Che al sedi (X, τ) un spazi topologjic. Une classe B di vierts di X si dîs* base pe topologjie *τ se ogni element di τ al è union di elements di B.*

Teoreme 1.16 *Che e sedi B une classe di sotinsiemits dal insiemit X. Alore B e je une base par une topologjie su X se e dome se*
1) X e je l'union di ducj i elements di B
2) se b e b' a son elements di B, alore, par ogni pont $p \in b \cap b'$, al esist un element di B che al è circondari di p e che al è contignût in $b \cap b'$.

Dimostrazion:
Che e sedi B une base par une topologjie, alore X al è un viert e duncje union di elements di B. Se b e b' a son doi elements di B, alore a son vierts. Duncje ancje la la lôr intersezion e je vierte e partant union di elements de base B. Al ven pulît che al esist un element di B che al è contignût in $b \cap b'$ e che il pont p i parten. Di chê altre bande se a

valin i ponts 1 e 2 alore B e je une base par une topologjie. Di fat che e sedi τ la classe di insiemits formade da ducj i sotinsiemits che a son union di elements di B. L'insiemit vueit e l'union vueide di elements di cualsisei famee duncje i parten a τ, di chê altre bande $X \in B$ e duncje $X \in \tau$. Ancje l'union infinide di elements che i partegnin a τ e je ancjemò un element di τ. Al reste di fâ viodi che l'intersezion finide di elements di τ i parten ancjemò a τ. Che a sedin A_1 e A_2 elements di τ, alore al vâl

$$A_1 = \bigcup_{i \in I} b_j \text{ e } A_2 = \bigcup_{j \in J} b_j$$

dulà che $b_i \in B$ par ogni $i \in I$ e $b_j \in B$ par ogni $j \in J$. Alore par ogni i e j al vâl

$$A_1 \cap A_2 = (\bigcup b_i) \cap (\bigcup b_j) = \bigcup (b_i \cap b_j).$$

Pal pont 3 o vin che par ogni pont $p \in b_i \cap b_j$ al esist un element b_p di B che al conten p e che al è contignût di $b_i \cap b_j$. Duncje al vâl

$$b_i \cap b_j = \bigcup_{p \in b_i \cap b_j} b_p.$$

Al ven pulît che $A_1 \cap A_2$ i parten a τ.

□

Definizion 1.17 (continuitât e topologjie) *Che a sedin (X, τ) e (Y, τ^*) doi spazis topologjics. Une funzion*

$$f : (X, \tau) \to (Y, \tau^*)$$

si dîs continue *se par ogni b che i parten a τ^* al vâl*

$$f^{-1}(b) \in \tau.$$

Definizion 1.18 *Che al sedi (X, τ) un spazi topologjic. Une cualsisei famee di insiemits $\{A_i\}_{i \in I}$ cun $A_i \in \tau$ par ogni $i \in I$ e tâl che*

$$X = \bigcup_{i \in I} A_i$$

e ven clamade cuvierzidure[4] *di X.*

[4]par inglês: *covering*. Par italian: *ricoprimento*.

Definizion 1.19 (compatece e topologjie) *Un spazi topologjic si dîs* compat *se di ogni cuvierzidure si pues gjavâ fûr une sotcuvierzidure finide.*

Teoreme 1.20 *Un sotinsiemit Y di un spazi topologjic compat X al è compat (te topologjie indusude) se e dome se al è sierât.*

Dimostrazion:
Che e sedi R une cuvierzidure di Y. Alore o viodìn che $R \cup \{X \setminus Y\}$ e je une cuvierzidure di X e, dal moment che X al è compat, o podin cjatâ une sotcuvierzidure finide di X. Gjavant di cheste cuvierzidure il viert $X \setminus Y$ o vin une sotcuvierzidure finide di Y.

□

Teoreme 1.21 *Che e sedi $f : X \to Y$ une funzion continue fra spazis topologjics. Se K al è un compat in X alore $f(K)$ al è un compat in Y.*

Dimostrazion:
Al baste fâ viodi che se R e je une cuvierzidure di $f(K)$, la famee $R' = \{f^{-1}(A)\ A \in R\}$ e je une cuvierzidure di K. Duncje R' e amet une sotcuvierzidure finide di K. A cheste sotcuviezidure i corispuint, simpri par tramit di f, une sotcuvierzidure finide di $f(K)$.

□

1.2 Spazis metrics

Definizion 1.22 *Considerìn un insiemit X no vueit. Une funzion*

$$d : X \times X \to \mathbf{R}^+$$

tâl che par ogni a, b e c elements di X a valin
1) $d(a, a) = 0$
2) $d(a, b) = d(b, a)$ *(simetrie)*
3) $d(a, c) \leq d(a, b) + d(b, c)$ *(disevualiance triangolâr)*
e ven clamade distance. *Il numar reâl $r = d(a, b)$ si clame* distance fra i elements a e b.

Definizion 1.23 *Un insiemit X dotât di une distance d al ven clamât* spazi metric.

Definizion 1.24 *Che al sedi (X, d) un spazi metric, x_0 un element di X e ρ un numar reâl. Si dîs* sfere (vierte) di centri x_0 e rai ρ *l'insiemit*

$$S(x_0, \rho) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < \rho\}.$$

Un spazi metric al pues jessi dotât di une struture naturâl di spazi topologjic, che al vûl dî, in buine sostance, che ogni spazi metric al è ancje un spazi topologjic. Di fat al baste definî la topologjie τ in cheste maniere:

$$\tau = \{V \,|\, \forall x \in V\, \exists r > 0 \,|\, S(x,r) \subseteq V\}.$$

Al è clâr che cuant che intun spazi metric si fevele di vierts, sierâts, ponts di acumulazion, funzions continuis e vie indenant, o stin considerant cheste topologjie.

Definizion 1.25 *Si dîs che un sotinsiemit di un spazi metric X al è limitât se e esist une sfere S tâl che $Y \subset S$.*

Teoreme 1.26 *Che al sedi X un spazi metric e K un sotinsiemit compat di X. Alore K al è sierât in X.*

Dimostrazion:
Che al sedi x un pont di acumulazion di K e metìn par assurt che $x \notin K$. Definìn $A_0 = K \setminus \overline{S(x,1/2)}$, $A_k = K \cap S(x,1/2k) \setminus \overline{S(x,1/(2k+1))}$ par $k = 1,2,\ldots$ e considerìn la famee $R = \{A_k : k = 0,1,2,\ldots\}$. R e je une cuvierzidure di K. Se e esistès une sotcuvierzidure finide di R, o varès che $K \subset K \setminus \overline{S(x,1/(2n))}$ par cualchi n. Chest al è assurt parcè al vûl dî che x nol è un pont aderent di K.

□

1.3 Topologjiis e metrichis sore spazis reâi

I elements di $\mathbf{R}^n$ a son lis n-plis $(x_1, x_2, ..., x_n)$ dulà che $x_i \in \mathbf{R}$ par ogni $i = 1,2,..,n$. Sore $\mathbf{R}^n$ pal solit si definìs la metriche derivade de *distance pitagoriche*. Che a sedin $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ alore

$$d(x,y) = |x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Si pues viodi in plui che lis sferis viertis $\mathbf{R}^n$ a formin une base pe topologjie indusude de distance d. Concentrìnsi cumò su la rete[5] reâl $\mathbf{R}$ cu la metriche e la topologjie dade de distance pitagoriche. Culì lis sferis viertis a son i intervai dal tipo[6] (a,b) dulà che i numars a e b no fasin part dal interval. Lis sferis sieradis invezit a son i intervai dal tipo $[a,b]$ dulà che i estrems a son tignûts dentri tal interval.

---

[5] par inglês: *line*. In [NM] si cjate *drete*.

[6] in [NM] e [L2000] si cjate *tip*. O vin preferide une soluzion plui in ûs.

Teoreme 1.27 (Heine-Borel) *L'interval* $[0, 1]$ *di* $\mathbf{R}$ *al è compat.*

> *Dimostrazion:*
> Che e sedi R une cuvierzidure di $[0, 1]$ (ven a stâi R e je une famee di vierts di $[0, 1]$ che e cuvierç $[0, 1]$). Che al sedi X l'insiemit dai ponts x di $[0, 1]$ tâi che e esist une sotfamee finide $R_x \subset R$ che e cuvierç l'interval $[0, x]$. Al è clâr che $0 \in X$, par tant X nol è vueit. Che al sedi $\lambda = \sup X$. Viodìn in prin che $\lambda \in X$. Di fat che al sedi $A \in R$ un cualsisei viert che al ten dentri λ, pe definizion di sup[7], al à di esisti un $\eta \in X$ $(\eta < \lambda)$ cun $\eta \in A$. Duncje vint a disposizion une famee finide R_η che e cuvierç $[0, \eta]$ al ven fûr che $R_\eta \cup \{A\}$ e je une famee finide che e cuvierç $[0, \lambda]$. Di chê altre bande se R_λ e je la famee finide che e cuvierç $[0, \lambda]$, notìn che, se $\lambda < 1$, al à di esisti un ϵ che par lui R_λ e cuvierç ancje $[0, \lambda + \epsilon]$ (chest parcè che l'union dai elements di R_λ e je un viert) e par tant $\lambda + \epsilon \in X$ che al è un assurt parcè che o vin sielzût $\lambda = \sup X$. In conclusion o vin dimostrât che $\lambda = 1$ e $\lambda \in X$, ven a stâi e esist une sotfamee finide di R che e cuvierç $[0, 1]$.
>
> $\square$

Notìn che di chest teoreme al ven fûr che ogni insiemit sierât e limitât di $\mathbf{R}$ al è compat. Di fat che al sedi Y un insiemit sierât di $\mathbf{R}$ cun $Y \subset S(x_0, r)$. La funzion $f\ \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = (x - x_0)/(2r) + 1/2$ e je une funzion continue cun invierse continue. Duncje $f(Y)$ al è sierât (jessint Y sierât e f^{-1} continue) e al salte fûr $f(Y) \subset [0, 1]$. Ven a stâi $f(Y)$ al è un sierât tun compat duncje al è compat, e ancje $Y = f^{-1}(f(Y))$ al è compat jessint f^{-1} continue. Di chê altre bande, notìn che in gjenerâl un insiemit no limitât Y di un spazi metric X nol pues jessi compat. Di fat, sielzût un cualsisei pont $x \in X$, considerìn la famee $R = \{S(x, k) \cap Y \mid k = 1, 2, \ldots\}$. R e je une cuvierzidure di Y e, se al fos pussibil gjavâ fûr une sotcuvierzidure finide, o varessin che $Y \subset S(x, n)$ (dulà che n al è il rai plui grant des sferis de sotcuvierzidure) e chest al va cuntri l'ipotesi Y no limitât. O vin ancje viodût che i insiemits compats di spazis metrics a son sierâts. Duncje si à che i insiemits sierâts e limitâts di $\mathbf{R}$ a son ducj e dome i sotinsiemits compats di $\mathbf{R}$.

1.4 Esercizis

1. Che al sedi X un cualsisei insiemit. Considerìn lis dôs fameis $\sigma = 2^X$ (l'insiemit des parts di X) e $\beta = \{\emptyset, X\}$.

[7] estrem superiôr di un insiemit.

(a) Dimostrâ che (X,σ) e (X,β) a son topologjiis su X (σ e ven clamade *topologjie discrete* e β e ven clamade *topologjie banâl*).

(b) Dimostrâ che (X,β) al è compat e che (X,σ) al è compat se e dome se X al è un insiemit finît.

(c) Che al sedi (Y,τ) un spazi topologjic. E che a sedin $f : X \to Y$ e $g : Y \to X$ funzions cualsisei. Dimostrâ che f e je continue di (X,σ) a (Y,τ) e che g e je continue di (Y,τ) a (X,β).

2. Che a sedin $d_1, d_2, d_\infty : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ lis funzions definidis di

$$\begin{aligned} d_1(x,y) &= \sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|, \\ d_\infty(x,y) &= \max_{k=1\ldots n} |x_k - y_k|, \\ d_2(x,y) &= \left(\sum_{k=0}^{n} (x_k - y_k)^2\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

(a) Provâ che d_1, d_∞ e d_2 a son distancis su $\mathbf{R}^n$. Par chel che al rivuarde d_2 pe dimostrazion de disevualiance triangolâr si podarà doprâ la disecuazion (di Cauchy):

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

(b) Dimostrâ che d_1, d_2 e d_∞ a indusin la stesse topologjie τ su $\mathbf{R}^n$. La topologjie τ e ven clamade *topologjie euclidee.*

3. Che a sedin X, Y doi spazis topologjics e $f : X \to Y$ une funzion. Fissât $x_0 \in X$ o disarìn che f e je *continue in* x_0 se par ogni circondari V di $f(x_0)$ in Y al esist un circondari U di x_0 in X tâl che $f(U) \subset V$ (ven a stâi $x \in U \Rightarrow f(x) \in V$). Dimostrâ che une funzion e je continue se e je continue in ogni pont dal domini.

4. Si cjati une funzion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ no continue (rispiet ae topologjie euclidee di $\mathbf{R}$).

5. Che al sedi $\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} \cup \{\infty\}$. Considerìn la famee $\mathcal{B}$ di ducj i sotinsiemits di $\mathbf{R}$ dal tipo $\{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$ e $\{x \in \mathbf{R} : |x| > a\} \cup \{\infty\}$ al variâ di a, b in $\mathbf{R}$.

(a) Dimostrâ che $\mathcal{B}$ e je la base di une topologjie su $\bar{\mathbf{R}}$.

(b) Dimostrâ che la funzion $\phi : [-\pi/2, \pi/2] \to \bar{\mathbf{R}}$ definide di

$$\phi(x) = \begin{cases} \tan(x) & \text{se} \quad x \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[\\ \infty & \text{se} \quad no \end{cases}$$

e je continue.

(c) Dimostrâ che $\bar{\mathbf{R}}$ al è compat.

6. Che a sedin X, Y doi spazis topologjics e che a sedi $\mathcal{B}$ une base pe topologjie di Y. Dimostrâ che une funzion $f : X \to Y$ e je continue se e dome se par ogni $B \in \mathcal{B}$ si à che $f^{-1}(B)$ al è viert.

Cjapitul 2

Sucessions sore spazis metrics

2.1 Lis sucessions

Definizion 2.1 *Che al sedi X un spazi metric. Une funzion $f : \mathbf{N} \rightarrow X$ e ven clamade* sucession. *O indicarìn cun a_n il valôr di $f(n)$. Duncje la nestre sucession si pues ancje scrivi te forme*

$$\{a_n\} = \{a_0, a_1, ..., a_n, ...\}.$$

Definizion 2.2 *Une sucession a_n si clame* sucession di Cauchy *se e dome se, par ogni numar ϵ plui grant di zero e piçul a plasê, al esist un indiç n' tâl che, par ogni cubie di indiçs m e n plui grancj di n', al vâl*

$$d(a_n, a_m) < \epsilon.$$

Definizion 2.3 *Si dîs che une sucession a_n tal spazi metric X e converç se al esist un element l di X che al sodisfe la propietât che e ven. Par ogni numar ϵ piçul a plasê, al esist un indiç n' tâl che, par ogni $n > n'$, al vâl*

$$d(a_n, l) < \epsilon.$$

Se la sucession a_n e converç tal element l o scrivarìn in struc che

$$\lim_{n \to \infty} a_n = l.$$

Al salte fûr pulît che une cualsisei sucession che e converç tal spazi metric X e je une sucession di Cauchy. Ma chest nol vûl dî che ogni sucession di Cauchy e converç in X. Di fat la sucession e podarès converzi sì, ma a un element che nol fâs part di X. Pensìn par esempli al insiemit dai numars razionâi. A esistin sucessions razionâls che a converzin a numars irazionâi.

Definizion 2.4 *Un spazi metric dulà che ogni sucession di Cauchy e converç si dîs* complet*.*

Par chel che o vin dit prime i numars razionâi no son un spazi complet. Si pues viodi che invezit i reâi lu son.

Definizion 2.5 *Che e sedi a_n une sucession. Se n_k e je une sucession cressint di numars naturâi, si dîs che la sucession a_{n_k} e je une sotsucession di a_n.*

2.2 Lis sucessions numerichis

Definizion 2.6 *Une funzion $f : \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ e ven clamade* sucession numeriche*.*

Fasìn un esempli: la funzion

$$f(n) = \frac{1}{n}$$

e je la sucession che e à par tiermins 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ... e vie indenant.

Definizion 2.7 *Che e sedi a_n une sucession numeriche e l un numar reâl finît. Si dîs che a_n* e tint *a l ($\lim_{n\to\infty} a_n = l$) se, par ogni ϵ numar reâl piçul a plasê, al esist un indiç n^* tâl che, par ogni $n > n^*$, al vâl*

$$|a_n - l| < \epsilon$$

(cheste e je la definizion di convergjence dade prime par spazis metrics, aplicade a $\mathbf{R}$). Se invezit, par ogni numar k plui grant di zero, al esist un indiç n^* tâl che, par ogni $n > n^*$, al vâl

$$a_n > k$$

si dîs che la sucession a_n e tint al infinît.

Une sucession che e tint a di un numar finît e ven clamade *sucession convergjent.*

Teoreme 2.8 (Bolzano-Weierstrass) *Di ogni sucession numeriche a valôrs intun interval sierât e limitât de rete reâl si pues gjavâ fûr une sotsucession che e converç intun pont dal interval.*

Dimostrazion:
Che e sedi a_n une sucession a valôrs tal interval sierât e limitât $[a, b]$ de rete reâl. Dividìn a mieç chest interval e sielzìn la part che e ten dentri un numar infinît di valôrs di a_n. Se dutis dôs a àn cheste propietât o sielzarìn par convenzion chê plui a çampe. Clamìn l'interval cjatât I_1.

Aplicant chest procediment in maniere iterative o cjatìn une sucession di intervai I_k di lungjece

$$|I_k| = \frac{b-a}{2^k}.$$

Costruìn la sotsucession x_{n_k} in maniere che il k-esim tiermin al stedi simpri tal k-esim interval. Alore o varìn

$$|a_{n_k} - a_{n_{k+1}}| \leq \frac{b-a}{2^k}$$

Duncje si à

$$|a_{n_k} - a_{n_{k+j}}| \leq \sum_{i=0}^{j-1} |a_{n_i} - a_{n_{i+1}}| \leq$$

$$\leq \sum_{i=0}^{j-1} \frac{b-a}{2^{k+i}} \leq \frac{b-a}{2^k} \sum_{i=0}^{j-1} \frac{1}{2^i} \leq 2\frac{(b-a)}{2^k}$$

e par tant la sotsucession a_{n_k} e je une sucession di Cauchy e duncje e converç tal interval $[a, b]$ (parcè che $\mathbf{R}$ al è complet).

□

O vin za viodût tal cjapitul precedent che ducj i compats di $\mathbf{R}$ a son intervai sierâts e limitâts, al risulte, come consecuence une vore impuartant, che ogni sucession a valôrs su di un compat di $\mathbf{R}$ e à une sô sotsucession che e converç tal compat.

2.3 Esercizis

1. Dimostrâ che se a_n e je une sucession numeriche che e converç a l, alore ogni so sotsucession e à di converzi a l.

2. No simpri il limit di une sucession al esist. Dimostrâ che

$$\lim_{n\to\infty} \cos(n\pi)$$

$$\lim_{n\to\infty} (-n)^n$$

no esistin.

3. Verificâ, doprant la definizion, che a valin i limits ripuartâts:

   (a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n} = 2$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1057n+12452}{n^2+1} = 0$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{e^n}{n} = \infty$

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{7n+4}{2n+29} = \frac{7}{2}$

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n} = 0$

(f) $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} - n = -\infty$

4. Calcolâ

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1+\frac{1}{1+e^{-n}}}{1+\frac{1}{\log n}}}$$

5. Calcolâ

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^{10}\sin\left(\frac{2}{n^6}\right)+1}{\log n \sin\sqrt{n}-n^5 7^{-n}-5n^4}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{7n+3}{n+2} + \frac{2n-2}{n-3}$

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^7+18n^6+3n^5+1837n^2+18497n+13992}{10^{-15}n^7(\sqrt{n}-9)}$

(d) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3n^2}$

(e) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log(n^7)}{\sqrt{n}}$

(f) $\lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n}-3)(\sqrt{n}-2)}{n}$

(g) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\pi-\pi\log n}{n^{\pi+\frac{1}{\sqrt{n}}}}$

(h) $\lim_{n\to\infty} \frac{2^{n^2+2}}{3^{5n-4}}$

(i) $\lim_{n\to\infty} \frac{e^{1+\log n}}{n^2}$

(j) $\lim_{n\to\infty} n\sin(\sin\frac{1}{n})$

(k) $\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos\frac{1}{\log n}}{(\log n)^2}$

(l) $\lim_{n\to\infty} n^2 \arcsin\frac{1}{n^2}$

(m) $\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}+\frac{1}{n\log n})\sqrt{1+n+n^2}$

(n) $\lim_{n\to\infty} \sin\left(n^{(-\pi+\frac{1}{n})}\right)\left(\tan(\frac{1}{n})\right)^{-\pi}$

(o) $\lim_{n\to\infty} \frac{\sin(\log n+\sqrt{3})}{n}$

(p) $\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{\cos(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n})}$

6. Che al sedi $\bar{\mathbf{N}} = \mathbf{N}\cup\{\infty\}$ il spazi topologjic dotât de topologjie indusude di $\bar{\mathbf{R}}$.

   (a) Dimostrâ che V al è un circondari di ∞ se e dome se $\infty \in V$ e al esist $N \in \mathbf{N}$ tâl che $n > N \Rightarrow n \in V$.

   (b) Che al sedi X un spazi topologjic. Dimostrâ che une funzion $f : \bar{\mathbf{N}} \to X$ e je continue se e dome se par ogni circondari V di $f(\infty)$ al esist $N > 0$ tâl che par ogni $n > N$ si à $f(n) \in V$.

   (c) Che al sedi X un spazi metric. Dimostrâ che une sucession a_n di elements di X e converç a di un limit l se e dome se la funzion $f : \bar{\mathbf{N}} \to X$ definide di $f(n) = a_n$, $f(\infty) = l$ e je continue.

7. Che al sedi $X \subset \mathbf{R}$ un insiemit compat. Dimostrâ che X al è complet.

Cjapitul 3

Continuitât e limits di funzions

3.1 Funzions continuis

Di cumò indenant che a sedin X e Y doi spazis metrics. Par comoditât di notazion o indicarìn la distance definide su X e chê definide su Y simpri cul simbul d.

Definizion 3.1 *Che al sedi x_0 un element di X. Si dîs che la funzion*

$$f : X \to Y$$

e je continue *in x_0 se, par ogni sielte di un numar ϵ piçul a plasê, al esist un numar δ (che al dipent di ϵ e x_0) che al sodisfe la propietât che e ven. Par ogni element x di X che al diste mancul di δ di x_0, al vâl*

$$d(f(x), f(x_0)) < \epsilon.$$

Une funzion continue in ogni pont di X e ven clamade continue su X (e si pues viodi che une funzion e je continue sore X in chest sens se e dome se lu è tal sens dât inte definizion dal cjapitul precedent).

Definizion 3.2 *Che a sedin x e y doi ponts dal spazi X. Si dîs che une funzion*

$$f : X \to Y$$

e je uniformementri continue *se, par ogni numar ϵ piçul a plasê, al esist un numar δ (che al dipent dome di ϵ e no di x e y) tâl che e vâl la propietât che e ven. Se $d(x, y) < \delta$ alore*

$$d(f(x), f(y)) < \epsilon.$$

Teoreme 3.3 (Heine-Cantor) *Che al sedi D un compat di* $\mathbf{R}$ *e che e sedi*

$$f : D \to \mathbf{R}$$

une funzion continue. Alore f e je ancje uniformementri continue.

Dimostrazion:
Metìn par assurt che f no sedi une funzion uniformementri continue. Alore al ven fûr pulît che al à di esisti un numar ϵ tâl che, par ogni pussibile sielte di δ piçul a plasê, e vâl la propietât seguint. A esistin doi elements x e y di D che a àn distance reciprochementri minôr di δ e che par lôr e vâl la formule

$$d(f(x), f(y)) > \epsilon.$$

Considerìn cumò la sucession

$$\delta_n = \frac{1}{n}.$$

Par ogni δ_n a esistin x_n e y_n che i partegnin a D, che a àn distance fra lôr minôr di δ_n e tâi che

$$d(f(x_n), f(y_n)) > \epsilon.$$

Par vie che D al è compat lis sucession che o vin sielzudis a àn dôs sotsucessions x_{n_k} e y_{n_k} che a converzin in D. Cun di plui δ_{n_k} e converç a zero. Duncje x_{n_k} e y_{n_k} a converzin al stes valôr x^*. Par vie de continuitât di f, alore, e varà di jessi

$$d(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \to 0.$$

E chest nol pues sei.

□

3.2 Limits di funzions a valôrs reâi

Definizion 3.4 *Che a sedin X un spazi metric, x_0 un element dal spazi X e f une funzion definide intun circondari di x_0 a valôrs in* $\mathbf{R}$. *Se al esist un element l tâl che, par ogni numar ϵ piçul a plasê, al esist un numar δ tâl che, par ogni element x di X che al diste mancul di δ di x_0, al vâl*

$$|f(x) - l| < \epsilon,$$

chest element l al ven clamât limit de funzion f par x che al tint a x_0 *e si segne cul simbul*

$$\lim_{x \to x_0} f(x).$$

Notìn che, cun cheste definizion, se al esist il limit di f par x che al tint a x_0 alore f e je continue in x_0.

Teoreme 3.5 (unicitât dal limit) *Che a sedin X un spazi metric e x_0 un element di X. Che e sedi cun di plui*

$$f : X \to \mathbf{R}$$

une funzion definide su un circondari di x_0 a valôrs in $\mathbf{R}$. Alore $\lim_{x \to x_0} f(x)$ al è unic.

Dimostrazion:
Metìn par assurt che a esistin doi limits l e l'. Alore, a condizion di sielzi x dongje di x_0, o varìn che

$$|l - f(x)| < \epsilon \text{ e ancje } |l' - f(x)| < \epsilon.$$

Sielzìn cumò

$$\epsilon = \frac{|l - l'|}{2}.$$

Alore

$$\begin{aligned} |l - l'| = |l - f(x) - l' + f(x)| < \\ |l - f(x)| + |l' + f(x)| < |l - l'| \end{aligned}$$

e chest nol pues jessi.

□

Teoreme 3.6 (de permanence di segn) *Che al sedi X un spazi metric, x_0 un so element e f une funzion definide su un circondari di x_0 a valôrs reâi. Che al sedi cun di plui*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) > 0.$$

Alore al esist un circondari di x_0 dulà che la funzion no mude mai di segn.

Dimostrazion:
Di fat par ipotesi o vin che al à di esisti un numar δ tâl che

$$|f(x) - l| < l.$$

Di chest al ven che

$$-l < f(x) - l < l \text{ e duncje } 0 < f(x) < 2l$$

ven a stâi il circondari dai elements che a distin mancul di δ di x_0 al è il circondari che o cirivin.

□

Teoreme 3.7 (dai doi carabinîrs) *Che al sedi X un spazi metric, x_0 un so element e f une funzion definide suntun circondari di x_0 a valôrs reâi. Cun di plui che a sedin g e h dôs funzions definidis dutis dôs sul domini di f e tâls che, par ogni x che i parten al domini di f, al vâl*

$$g(x) < f(x) < h(x) \text{ e } \lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = l.$$

Alore

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l.$$

Dimostrazion:
Di fat, une volte fissât un numar ϵ piçul a plasê, al ven che

$$|h(x) - l| < \epsilon \text{ e } |g(x) - l| < \epsilon$$

a condizion di sielzi x avonde dongje di x_0. Di chest al salte fûr pulît che

$$l - \epsilon < g(x) < f(x) < h(x) < l + \epsilon$$

ven a stâi $|f(x) - l| < \epsilon$ e duncje la tesi.

□

Teoreme 3.8 (des nulis o dai zeros) *Che al sedi $[a, b]$ un interval di* $\mathbf{R}$ *e*

$$f : [a, b] \to \mathbf{R}$$

une funzion continue. Se

$$f(a)f(b) < 0$$

alore al esist un pont x_0 dal interval $[a, b]$ tâl che

$$f(x_0) = 0.$$

Dimostrazion:
Se $f(a) = 0$ o sin a puest. Metìn alore che $f(a) > 0$ (se no al varà di jessi $f(b) < 0$ e al bastarà scambiâ $f(a)$ cun $f(b)$ te nestre dimostrazion). Costruìn cumò une sucession di sotintervai dal nestri interval di partence. Dividìn a mieç l'interval $[a, b]$. Se la funzion calcolade tal pont medi e je inmò positive o considerarìn come interval sucessîf l'interval daurman plui a diestre. Se invezit la funzion calcolade tal pont medi e je negative o considerarìn come interval sucessîf l'interval daurman plui a çampe. Lant indevant in mût iteratîf o costruìn la nestre sucession di sotintervai. Considerìn cumò la sucession dai estrems drets de

nestre sucession di sotintervai e clamìnle x_n. La sucession x_n e je di Cauchy e duncje e à di converzi ad un ciert valôr x^* di $[a, b]$. Di chê altre bande, ancje la sucession y_n dai estrems çamps e je di Cauchy e duncje e converzarà a un cualchi pont y^* dal interval $[a, b]$. Cumò

$$\begin{aligned}|x^* - y^*| &< |x^* - x_n + x_n - y_n + y_n - y^*| \\ &< |x^* - x_n| + |x_n - y_n| + |y_n - y^*| < \epsilon\end{aligned}$$

a condizion di sielzi i ultins trê valôrs plui piçui di $\frac{\epsilon}{3}$ (e chest si pues fâlu par chel che o vin dit prime). Duncje lis dôs sucessions a converzin al stes pont x_0 dal interval $[a, b]$. Di chê altre bande, viodût che la nestre funzion f e je continue, o vin che

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x^*) \geq 0$$

e ancje

$$\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(y^*) \leq 0$$

ma alore

$$f(x_0) = f(x^*) = f(y^*) = 0.$$

□

Definizion 3.9 *Che e sedi f une funzion definide sul interval $[a, b]$ de rete reâl a valôrs in* $\mathbf{R}$. *f e ven clamade* stretementri monotone *(cressint) se par ogni, x_1 e x_2 che i partegnin a $[a, b]$ cun $x_1 < x_2$, al vâl*

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Teoreme 3.10 (de funzion invierse) *Che e sedi f une funzion stretementri monotone (cressint) definide sul interval $[a, b]$ de rete reâl a valôrs in* $\mathbf{R}$. *Alore*
1) $f(x)$ e assum ogni valôr fra il massim e il minim de funzion.
2) $f(x)$ e je une funzion biietive sore l'imagjine.
3) f^{-1} e je monotone (cressint) e continue.

Dimostrazion:
1) Che al sedi y_0 un cualsisei valôr comprindût fra il massim e il minim di f su $[a, b]$. Considerìn la funzion ausiliarie

$$g(x) - y_0.$$

Che a sedin cumò x_1 e x_2, in mût rispetîf, i doi ponts di $[a, b]$ dulà che f e à il so minim m e il so massim M. Alore

$$g(x_1) = m - y_0 < 0 \text{ e } g(x_2) = M - y_0 > 0.$$

Duncje, pal teoreme des nulis, al esist un valôr x_0 che al anule $g(x)$, ven a stâi

$$g(x_0) = f(x_0) - y_0 = 0.$$

2) f e je surietive insieme cun l'imagjine pal pont 1 de dimostrazion. Nus reste di fâ viodi che f e je inietive. Ma chest al ven pulît dal fat che f e je monotone in mût strent.

3) Che a sedin y_1 e y_2 doi elements dal codomini di f cun $y_1 < y_2$. Alore $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$ e $x_1 < x_2$, ma $x_1 = f^{-1}(y_1)$ e, in mût simil, par x_2. Duncje f^{-1} e je monotone in mût strent.
Viodût che f e je continue o vin, par ogni x_0 tal domini, che

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Duncje al ven

$$\lim_{y \to y_0} f^{-1}(y) = \lim_{f(x) \to f(x_0)} f^{-1}(f(x)) = \lim_{f(x) \to f(x_0)} x = x_0 = f^{-1}(y_0).$$

Ven a stâi f^{-1} e je continue.

□

Teoreme 3.11 (di Weierstrass) *Che al sedi $[a, b]$ un interval de rete reâl e f une funzion li definide e a valôrs reâi. Se f e je ancje continue su $[a, b]$, alore f e amet un massim e un minim sore $[a, b]$.*

Dimostrazion:
Che al sedi

$$\mathcal{A} = \{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

Segnìn cun M l'estrem superiôr dal insiemit $\mathcal{A}$. Alore e esist une sucession $f(x_n)$ che e tint a $\mathcal{M}$. Cumò, par 2.8, e esist une sotsucession x_{n_k} che e converç a un pont x_0 che i parten a $[a, b]$. Ma, viodût che f e je continue, al ven che

$$M = \lim_{n \to \infty} f(x_n) = \lim_{k \to \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0).$$

Duncje M no dome al è l'estrem superiôr, ma al è ancje il massim di $\mathcal{A}$.

Dimostrazion alternative: Dal moment che $[a, b]$ al è compat e f continue, o vin che $f([a, b])$ al è compat ven a stâi al è sierât e limitât. Ma al è facil viodi che i insiemits sierâts e limitâts a ametin massim e minim.

□

3.2.1 Tabele dai limits notevui

Ve chi un ristret dai principâi limits notevui di funzions reâls:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

3. $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$

5. $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{z}{x})^x=e^z$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

7. $\lim_{x\to\infty}\sqrt[x]{x}=1$

3.3 Esercizis

1. Che e sedi $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ e x_0, $l\in\mathbf{R}$. Si dîs che

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l$$

(il limit diestri di f par x che al tint a x_0 al è l) se, par ogni sielte di ϵ piçul a plasê, al esist $\delta\in\mathbf{R}$ tâl che, $\forall x\in]x_0,x_0+\delta[$ si à $f(x)-f(x_0)<\epsilon$. In mût analic si pues definî il limit çamp di f in x_0 che si segne cul simbul

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x).$$

(a) Verificâ che $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ se e dome se

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=l.$$

(b) Dimostrâ che il limit $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$ nol esist.

(c) Verificâ che, se al esist il limit diestri

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x}$$

alore

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}.$$

(d) Dopo di vê osservât che par ogni $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ e vâl la disecuazion

$$\sin x < x < \tan x$$

dimostrâ il limit notevul

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

2. Provâ che

$$f(x) = \left(\frac{\log(x+3)}{\sqrt{x-2}}\right)^{\sin x + \tan x} + \sqrt[x]{x}$$

e je une funzion continue.

3. Che a sedin $f, g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ dadis di

$$f(x) = 0 \qquad g(y) = \begin{cases} \frac{sin(y)}{y} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0. \end{cases}$$

Verificâ che $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$, $\lim_{y\to 0} g(y) = 1$ ma $\lim_{x\to 0} g(f(x)) = 0$.

4. Dât un insiemit $A \subset \mathbf{R}$ definìn la funzion carateristiche $\chi_A : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ come $\chi_A(x) = 1$ se $x \in A$, $\chi_A(x) = 0$ se $x \notin A$.

   (a) Dimostrâ che la funzion $\chi_{\mathbf{Q}} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ no je continue in nissun pont $x \in \mathbf{R}$.

   (b) Studiâ la continuitât de funzion $f(x) = x\chi_{\mathbf{Q}}(x)$.

5. Provâ che la funzion $f : \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}$ definide di $f(x) = x/|x|$ e je continue. Notâ che il grafic no si disegne cence distacâ la pene dal sfuei.

6. Provâ che la funzion $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definide di $f(x) = x^2$ e je continue ma no je uniformementri continue.

7. Considerìn l'ecuazion
$$\cos x = x.$$
Dade la sucession (a_n) definide par ricorence di $a_1 = 17$, $a_{n+1} = \cos(a_n)$ dimostrâ che se al esist (finît) il limit
$$\lim_{n\to\infty} a_n = l$$
alore l al risolf l'ecuazion dade.

8. Che a sedin $x, y : [0,1] \to \mathbf{R}$ dôs funzions continuis talis che $x(0) = y(0) = 0$, $x(1) = 10$, $y(1) = 3$. Provâ che al esist $t \in [0,1]$ tâl che $\sqrt{x^2(t) + y^2(t)} = 1$ (ven a stâi la curve $(x(t), y(t))$ e incuintre la circonference unitarie).

9. (a) Provâ che dade une cualsisei funzion continue $f : \mathbf{R} \to [0,1]$ al esist $y \in \mathbf{R}$ tâl che il numar di soluzions de ecuazion $f(x) = y$ al è diviers di 1;
   (b) Provâ che dade une cualsisei funzion continue $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ al esist $y \in \mathbf{R}$ tâl che l'ecuazion $f(x) = y$ no à soluzions $x \in \mathbf{R}$;

10. Che e sedi $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une funzion continue.
    (a) Dimostrâ che se $f(x) > |x|$ par ogni $x \in \mathbf{R}$ alore f e amet minim.
    (b) Dimostrâ che se $|f(x)| < 1/|x|$ par ogni $x \in \mathbf{R}$ alore f e amet massim.
    (c) Dimostrâ che se $f(x) = f(x+1)$ par ogni $x \in \mathbf{R}$ alore f e amet massim e minim.
    (d) Dimostrâ che se $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ alore f e amet massim o minim.

11. Che e sedi $f : [0,1] \to [0,1]$ une funzion continue. Dimostrâ che l'ecuazion $f(x) = x$ e amet soluzion.

12. Calcolâ i limits seguints:
    (a) $\lim_{x\to\infty}(1 - \frac{1}{x})^{3x}$
    (b) $\lim_{x\to 2}(x-1)^{\frac{2}{x-2}}$
    (c) $\lim_{x\to 2} \frac{\sin 5x}{\sin x}$
    (d) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^{10}\log x}{3x^{10}+5x^5+2}$
    (e) $\lim_{x\to-\infty}(7-x)\sin\frac{1}{x}$.

Cjapitul 4

Lis derivadis

Di chi indevant che al sedi x_0 un pont de rete reâl, f une funzion definide sore un circondari di x_0 a valôrs in $\mathbf{R}$ e x un pont che i parten al domini de funzion f.

4.1 Il concet di derivade

Definizion 4.1 *Il rapuart*

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

al ven clamât rapuart incrementâl *de funzion $f(x)$ tal pont x_0.*

Al è clâr che il significât gjeometric di cheste grandece al è chel di rapresentâ il coeficient angolâr de rete che passe pai ponts $(x, f(x))$ e $(x_0, f(x_0))$.

Definizion 4.2 *Il limit dal rapuart incrementâl*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

se al esist al ven clamât derivade de funzion f calcolade tal pont x_0 *e la funzion si dîs* derivabil *in x_0.*

La funzion che a ogni pont dal domini de funzion $f(x)$ e assegne il valôr de derivade di f calcolade in chel pont e e ven clamade *funzion derivade* di f. La derivade di $f(x)$ si segne pal solit cui simbui

$$Df(x) \quad f'(x) \quad \frac{d}{dx}f(x).$$

Il significât gjeometric di $f'(x_0)$ al è chel di rapresentâ il coeficient angolâr de rete tangjent al grafic de funzion f tal pont $(x_0, f(x_0))$.

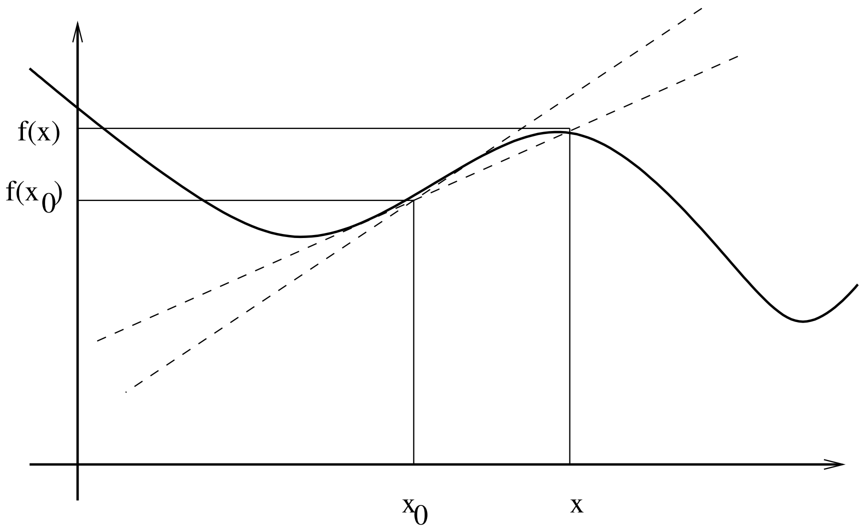


Figure 4.1: rapresentazion grafiche de derivade de funzion $f(x)$.

Teoreme 4.3 *Se la funzion $f(x)$ e je derivabil in x_0 alore alì e je ancje continue.*

Dimostrazion:
Jessint

$$f(x) - f(x_0) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}(x - x_0)$$

par x diferent di x_0, o vin che, passant al limit par x che al tint a x_0, al ven

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \lim_{x \to x_0} (x - x_0) =$$

$$= f'(x_0) \lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0.$$

Al ven

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

e duncje la tesi.

□

Al è ben visâsi che il teoreme precedent al costituìs une condizion necessarie, ma no suficient. Di fat nol è nuie vêr che se la funzion $f(x)$ e je continue in x_0 alore e je ancje derivabil. Par esempli la funzion valôr assolût

$$f(x) = |x|$$

e je continue in zero, ma no derivabil di fat

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1.$$

4.2 Trê teoremis su lis derivadis

Teoreme 4.4 *Che a sedin f e g dôs funzions definidis in un circondari di x_0 a valôrs reâi e li derivabilis. Alore*

$$D(f\cdot g) = f'\cdot g + f\cdot g'.$$

Dimostrazion:
Di fat al è

$$\frac{d}{dx}(f\cdot g)(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x)-f(x_0)g(x)+f(x_0)g(x)-f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= g(x_0)\cdot \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + f(x_0)\cdot \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} =$$

$$= f'(x_0)g(x_0) + g'(x_0)f(x_0).$$

□

Teoreme 4.5 (di derivazion des funzions compuestis) *Che e sedi g une funzion definide sul codomini de funzion f e alì derivabil. Cun di plui che e sedi ancje f derivabil tal so domini, alore al vâl*

$$\frac{d}{dx} g(f(x)) = g'(f(x))f'(x).$$

Dimostrazion:
Che al sedi x_0 un pont dal domini di f. Se e esist une sucession $x_k \to x_0$ di ponts tâi che $f(x_k) = f(x_0)$ alore par fuarce al à di sei $f'(x_0) = 0$ parcè che

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{k\to\infty} \frac{f(x_k)-f(x_0)}{x_k-x_0} = 0.$$

Di chê altre bande ancje $(f \circ g)'(x_0) = 0$ dal moment che ancje $(f \circ g)(x_k) = (f \circ g)(x_0)$. E duncje al vâl $(f \circ g)'(x_0) = 0 = g'(f(x_0))f'(x_0)$. Se no esist nissune sucession $x_k \to x_0$ cu la propietât che $f(x_k) = f(x_0)$ al vûl dî che al esist un circondari di x_0 dulà che $f(x) \neq f(x_0)$ se $x \neq x_0$. Duncje, in chest câs, si à

$$g'(f(x_0)) = \lim_{y \to f(x_0)} \frac{g(y) - g(f(x_0))}{y - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)}$$

e, oviementri

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Alore si à, come che o volevin,

$$\begin{aligned} g'(f(x_0))f'(x_0) &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = (g \circ f)'(x_0). \end{aligned}$$

□

Teoreme 4.6 (di derivazion de funzion invierse) *Che e sedi f une funzion derivabil e invertibil, alore, se $f'(x) \neq 0$ o vin, par $y = f(x)$*

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y) = \left(\frac{d}{dx} f(x) \right)^{-1}.$$

Dimostrazion:
Di fat, se o segnìn cun y_0 il valôr di $f(x_0)$, al è

$$\frac{d}{dy} f^{-1}(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = [\frac{d}{dx} f(x)]^{-1}.$$

□

4.3 Derivadis fondamentâls di funzions

In cheste sezion dutis lis funzion a son definidis intun circondari dal pont x_0.

Teoreme 4.7 (derivazion di costants) *La derivade de funzion costant e je nule. Duncje e vâl la formule*

$$Dc = 0.$$

Dimostrazion:
Segnìn cul simbul c la funzion costant, alore

$$\frac{d}{dx}c(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{c - c}{x - x_0} = 0.$$

□

Teoreme 4.8 (derivazion de funzion identitât) *E vâl la formule*

$$Dx = 1.$$

Dimostrazion:
Di fat al è

$$\lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1.$$

□

Teoreme 4.9 (derivazion des funzions polinomiâls) *Che al sedi n un numar intîr. Alore e vâl la formule*

$$Dx^n = nx^{n-1}.$$

Dimostrazion:
Dimostrìn la formule par induzion su n. Se $n = 1$ alore la nestre formule e je vere. Suponìnle vere par n e cirìn di dimostrâle par $n+1$. Alore

$$Dx^{n+1} = D(x^n \cdot x) = D(x^n) \cdot x + x^n \cdot Dx =$$

$$nx^{n-1} \cdot x + x^n = nx^n + x^n = (n+1)x^n.$$

Ven a stâi la tesi.

□

Teoreme 4.10 (derivazion des funzions esponenziâls) *E vâl la formule*

$$De^x = e^x.$$

Dimostrazion:
Di fat segnant $\exp(x) = e^x$ si à

$$\exp'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{e^x - e^{x_0}}{x - x_0} = e^{x_0} \lim_{x \to x_0} \frac{e^{x - x_0} - 1}{x - x_0}$$

che se o segnìn $x - x_0$ cun t al devente

$$e^{x_0} \lim_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = e^{x_0} \cdot 1 = e^{x_0}.$$

□

Proposizion 4.11 *Che al sedi a un numar razionâl, alore e vâl la formule*

$$Da^x = \ln a \cdot a^x.$$

Dimostrazion:
Par vie che $e^{\ln a} = a$, al ven che $a^x = e^{x \ln a}$. Duncje

$$\frac{d}{dx} a^x = \ln a \cdot e^{x(\ln a - 1)} \cdot e^x = \ln a \cdot e^{x \ln a} =$$

$$= \ln a \cdot (e^{lna})^x = (\ln a) \cdot a^x.$$

□

Proposizion 4.12 (derivazion de funzion logaritmiche) *Che al sedi a un numar reâl, alore e vâl*

$$D \log_a x = \frac{1}{x \cdot \ln a}.$$

Dimostrazion:
La funzion invierse de funzion $y = \log_a x$ e je $x = a^y$. Alore, par 4.6 al ven

$$[\frac{d}{dx} \log_a x]^{-1} = \frac{d}{dy} a^y = a^y \ln a = x \ln a$$

ven a stâi la tesi.

□

Osservìn che de proposizion 4.12 al ven pulît che

$$D \ln x = \frac{1}{x}.$$

Teoreme 4.13 (derivazion de funzion sen) *E vâl la formule*

$$D \sin x = \cos x.$$

Dimostrazion:
Di fat

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin x = \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \\ = \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \\ = \lim_{h \to 0} \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h - \sin x}{h}. \end{aligned}$$

E duncje al ven che

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \sin x = \cos x + \sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} = \\ = \cos x + \sin x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h \cdot (\cos h + 1)} = \\ \cos x + \sin x \cdot (\lim_{h \to 0} \frac{-\sin h}{h} \cdot \frac{\sin h}{\cos h + 1}) = \cos x. \end{aligned}$$

□

Teoreme 4.14 (derivazion de funzion cosen) *E vâl la formule*

$$D \cos x = -\sin x.$$

Dimostrazion:
Di fat

$$\cos(x) = \sin(x + \pi/2)$$

duncje

$$D \cos(x) = D \sin(x + \pi/2) = \cos(x + \pi/2) = -sin(x).$$

□

Teoreme 4.15 *Che e sedi la funzion f derivabil sore il so domini. Alore se $f(x) \neq 0$ e vâl la formule*

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{f(x)} = -\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}.$$

Dimostrazion:
Di fat, pai teoremis 4.5 e 4.9, al ven che

$$\frac{d}{dx}\frac{1}{f(x)} = \frac{d}{dx}[f(x)^{-1}] = -[f(x)^{-2}] \cdot f'(x).$$

□

Teoreme 4.16 (derivazion dal rapuart di dôs funzions) *Che a sedin f e g dôs funzions derivabilis sore il stes domini. Alore se $g(x) \neq 0$ e vâl la formule*

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

Dimostrazion:
Di fat, pai teoremis 4.4 e 4.3, al ven che

$$\frac{d}{dx}[\frac{1}{g(x)} \cdot f(x)] = -\frac{g'(x)}{g(x)^2} \cdot f(x) + f'(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$$

ven a stâi la tesi.

□

Teoreme 4.17 (derivazion de potence) *Che al sedi x un numar positîf e α reâl cualsisei. Alore si à*

$$D(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Dimostrazion:
Di fat

$$x^\alpha = e^{\alpha \log(x)}$$

$$Dx^\alpha = D(e^{\alpha \log(x)}) = e^{\alpha \log(x)} D(\log(x)) = \frac{x^\alpha}{x} = x^{\alpha-1}.$$

□

Proposizion 4.18 (derivazion de lidrîs di une funzion) *Che e sedi f une funzion derivabil sore il so domini. Alore e vâl la formule*

$$\frac{d}{dx}\sqrt{f(x)} = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$

Dimostrazion:
Di fat al ven che

$$\frac{d}{dx}[f(x)^{\frac{1}{2}}] = \frac{1}{2}[f(x)]^{-\frac{1}{2}} \cdot f'(x).$$

□

Teoreme 4.19 (derivazion de funzion tangjent) *E vâl la formule*

$$D \tan x = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Dimostrazion:
Di fat al ven che

$$\frac{d}{dx}\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

□

Proposizion 4.20 (derivazion de funzion arc sen) *E vâl la formule*

$$D \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Dimostrazion:
La funzion arc sen e je la funzion invierse de funzion sen. Cumò doprìn il teoreme di derivazion de funzion invierse 4.6:

$$\frac{d}{dx}\arcsin x = [\frac{d}{dy}\sin y]^{-1} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

□

Proposizion 4.21 (derivazion de funzion arc cosen) *E vâl la formule*

$$D \arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Dimostrazion:
La funzion arc cosen e je la funzion invierse de funzion cosen. Cumò doprìn il teoreme di derivazion de funzion invierse 4.6:

$$\frac{d}{dx}\arccos x = [\frac{d}{dy}\cos y]^{-1} = \frac{1}{-\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

□

Proposizion 4.22 (derivazion de funzion arc tangjent) *E vâl la formule*

$$D \arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

Dimostrazion:
La funzion arc tangjent e je la funzion invierse de funzion tangjent. Alore doprìn il teoreme di derivazion de funzion invierse 4.6:

$$\frac{d}{dx}\arctan x = [\frac{d}{dy}\tan y]^{-1} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

□

4.4 Esercizis

1. Calcolâ la derivade di:
   (a) $3x^{15} + \frac{1}{2}x^7 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^6} + 5$
   (b) $\frac{1}{\cos x + \sin x}$
   (c) $\tan x \sin x$
   (d) $\sqrt{\frac{x^2+x+7}{x+1}}$
   (e) $\frac{e^{3x}}{e^{2x}+e^{-2x}}$
2. Calcolâ la derivade des funzions ca sot:
   (a) $f(x) = \frac{\sqrt{2-x^2}}{\exp(\sin(x+2/x))}$;
   (b) $f(x) = \sin(x+3)\cos(4-x)e^{3x^2}$;
   (c) $f(x) = (x^2)^{3x+2}$;
3. Dî tropis voltis che e je derivabil la funzion

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x}} & \text{se} \quad x < 0 \\ x^3 & \text{se} \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Cjapitul 5

Studi di funzions reâls

Di cumò indenant dutis lis funzions cjapadis in considerazion a saran simpri a valôrs reâi.

5.1 Teoremis di Rolle, Cauchy e de l'Hôpital

Teoreme 5.1 (di Rolle) *Che e sedi la funzion f derivabil sore l'interval viert (a, b) de rete reâl. Se la funzion e je ancje continue sore $[a, b]$ e*

$$f(a) = f(b),$$

alore al esist almancul un pont, interni al interval, dulà che la derivade de funzion e je nule.

Dimostrazion:
Viodût che la nestre funzion e je continue sore $[a, b]$, par 3.11, al ven che f e amet un massim M e un minim m sore $[a, b]$. Che a sedin $f(x') = m$ e $f(x'') = M$, cun x' e x'' che i partegnin a $[a, b]$. Duncje a puedin risultâ i câs che e seguissin: (1) $m = M$. Alore la nestre funzion e je costant e duncje la sô derivade e je pardut nule. (2) $m < M$. Alore, une volte sielzût un numar reâl positîf h piçul a plasê, o varìn che

$$\frac{f(x'' - h) - f(x'')}{-h} \geq 0$$

e ancje che

$$\frac{f(x'' + h) - f(x'')}{h} \leq 0.$$

Duncje passant al limit, par h che al tint a zero, al risulte che $f'(x'') \geq 0$ e al stes timp $f'(x'') \leq 0$, ven a stâi $f'(x'') = 0$.

□

Teoreme 5.2 (Cauchy) *Che a sedin f e g dôs funzions derivabilis sore l'interval viert (a, b) de rete reâl e ancje continuis sore $[a, b]$, alore al esist un pont c che i parten al interval sierât $[a, b]$ tâl che*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dimostrazion:
Che e sedi

$$F_k(x) = f(x) - kg(x).$$

$F_k(x)$ e je une funzion che e dipent dal parametro[1] reâl k. Cirìn il valôr k' che par lui al vâl

$$F_{k'}(a) = F_{k'}(b).$$

Viodût che al varà di jessi

$$f(a) - k'g(a) = f(b) - k'g(b)$$

al ven che il valôr di k' cirût al è

$$k' = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Segnìn $F_{k'}(x)$ cun $F(x)$, par comoditât di notazion. $F(x)$ al sodisfe il teoreme 5.1 di Rolle e duncje al esist un pont $c \in (a, b)$ tâl che

$$F'(c) = f'(c) - k'g'(c) = 0,$$

ven a stâi

$$k' = \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

□

Sicu corolari nus ven il seguint.

Teoreme 5.3 (Lagrange) *Che e sedi la funzion f derivabil sore l'interval viert (a, b) de rete reâl e continue sore $[a, b]$. Alore al esist $c \in [a, b]$ tâl che al vâl*

$$f'(c)(b-a) = f(b) - f(a).$$

[1] la soluzion di [NM] e je *parametri*. Ancje chi si sin tignûts plui dongje dal ûs.

Dimostrazion:
E je la stesse di 5.2, sielzint $g(x) = x$.

□

Teoreme 5.4 (De l'Hôpital) *Che a sedin f e g dôs funzions derivabilis intun circondari dal pont x_0 de rete reâl cun derivadis continuis tal circondari. Cun di plui che al sedi*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = \lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) = 0$$

Alore, se al esist il limit

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x),}$$

al vâl

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}.$$

Dimostrazion:
Cjapìn in considerazion un circondari diestri di x_0, de forme $[x_0, x_0+h]$ cun $h > 0$. In chest circondari lis funzions a sodisfin il teoreme di Cauchy 5.2 e duncje al à di esisti un pont, $x_0 + \theta h$ cun $0 < \theta < 1$, dulà che e vâl la relazion

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{g(x_0 + h) - g(x_0)} = \frac{f'(x_0 + \theta h)}{g'(x_0 + \theta h)}.$$

Segnìn $x_0 + h = x$, alore, viodût che par ipotesi $f(x_0) = g(x_0) = 0$, al ven

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0 + \theta h)}{g'(x_0 + \theta h)}.$$

Duncje, passant al limit par x che al va a x_0, al risulte

$$\lim_{x \to x_0^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f'(x_0 + \theta h)}{g'(x_0 + \theta h)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dal moment che si pues resonâ ae stesse maniere pal circondari çamp di x_0 e ven la tesi.

□

5.2 La formule di Taylor

Cheste formule e covente al fin di aprossimâ une funzion cuntun polinomi. Chest al pues jessi une vore util par sclarî il compuartament de funzion intun pont-limit x_0.

Definizion 5.5 *Che a sedin f e g dôs funzions definidis intun circondari dal pont x_0 de rete reâl. Si dîs che f al è* un o-piçul *(in simbui o segnarìn $f \in o(g)$) di g par x che al tint a x_0, se*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

Che e sedi f une funzion derivabil n voltis cun continuitât intun circondari di x_0; il nestri obietîf al è cumò chel di cjatâ un polinomi $p_n(x)$ di grât n tâl che la diference

$$R_n(x) = f(x) - p_n(x)$$

e sedi un $o((x-x_0)^n)$. Chest al significhe che p_n al aprossime ben $f(x)$ par x che al tint a x_0. Cjapìn come $p_n = \sum_{k=0}^n a_k(x-x_0)^k$ il polinomi che al à derivadis in x_0 che e coincidin cun lis derivadis di f. Duncje, segnant rispetivementri cun $f^{(k)}$ e $p_n^{(k)}$ la derivade k-esime de funzion f e dal polinomi p_n, al varà di jessi

$$f^{(k)}(x_0) = p_n^{(k)}(x_0) = k!a_k$$

ven a stâi

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)(x-x_0)^k$$

(notait che $f^{(0)} = f$ e par convenzion $(x-x_0)^0 = 1$). In chest mût o vin che

$$R_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0) - p_n^{(k)}(x_0) = 0$$

par $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. Il leme seguint nus permet di concludi che $R_n(x)$ al parten a $o((x-x_0)^n)$.

Leme 5.6 *Che e sedi f une funzion derivabil n voltis, cun derivadis continuis, in un circondari di x_0 e $f^{(k)}(x_0) = 0$ par $k = 0, 1, \ldots, n$. Alore $f \in o((x-x_0)^n)$.*

Dimostrazion:
Cjapìn in considerazion il limit seguint

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x-x_0)^n}.$$

Dal moment che $f(x) \to 0$ par $x \to x_0$ il limit al cjape la forme indeterminade $0/0$ e si pues aplicâ l'Hôpital:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

o vin ancjemò une forme indeterminade e, lant indevant a aplicâ l'Hôpital, nus ven

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^n} &= \ldots = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(k)}(x_0)}{n(n-1)\ldots(n-k+1)(x-x_0)^{n-k}} \\ &= \ldots = \lim_{x\to x_0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} = 0\end{aligned}$$

□

E risulte alore la formule di Taylor cul rest di Peano

$$p(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0^k) + R_n(x).$$

5.3 Studi di funzions

Par studi di une funzion reâl si intint la ricercje des informazions necessariis a ricostruînt il compuartament e il grafic. Pal solit, tal studi di une funzion $f(x)$, si domande di:

- stabilî l'insiemit di definizion di $f(x)$ e lis sôs eventuâls propietâts particolârs[2];
- calcolâ lis intersezions di $f(x)$ cui as cartesians e, eventualmentri, studiânt il segn;
- studiâ il compuartament de funzion ae frontiere dal so insiemit di definizion;
- determinâ eventuâi ponts di massim e minim[3];
- scrivi l'ecuazion dai eventuâi asintots[4] de funzion.

[2]simetrie, periodicitât etc.

[3]e ancje i eventuâi ponts di fles, ven a stâi i ponts li che la concavitât de funzion $f(x)$ e cambie. La concavitât di une funzion si pues rigjavâ dal segn de sô derivade seconde. In particolâr, $f''(x_0) \geq 0$ se e dome se f in x_0 e je convesse (ven a stâi e à concavitât viers l'alt). E, in mût analic, $f''(x_0) \leq 0$ se e dome se f in x_0 e je concave (ven a stâi e à concavitât viers il bas). Di chescj risultâts no vin ripuartât la dimostrazion.

[4]intuitivementri, l'asintot di une funzion reâl e je une rete tangjent ae funzion a l'infinît.

Criteris pe ricercje dai ponts di massim e minim

O darìn cumò la dimostrazion di doi criteris pal studi di funzions.

Teoreme 5.7 (criteri di monotonie) *Che e sedi f une funzion continue sore un interval sierât $[a,b]$ e derivabil sore l'interval viert (a,b). Alore f e je cressint sore $[a,b]$ se e dome se $f'(x) \geq 0$ par ogni x che i parten a (a,b).*

Dimostrazion:
Pal teoreme di Lagrange 5.3 o savin che, une volte dâts $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$, al vâl

$$f(x_2) - f(x_2) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Viodût che $f'(c) \geq 0$ al ven che $f(x_2) \geq f(x_1)$, ven a stâi la tesi. Di chê altre bande $f'(c) \geq 0$ par $x \in (a,b)$ si à che

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0.$$

dal moment che $f(x+h) - f(x) \geq 0$ par $h \geq 0$.

□

Al è clâr ancje che di chest criteri al ven pulît che f e je decressint in $[a,b]$ se e dome se $f'(x)$ e je negative sore (a,b).

Teoreme 5.8 (criteri pai minims e pai massims) *Che e sedi f une funzion definide sore $[a,b]$ e che al sedi $x_0 \in (a,b)$ un pont di massim o di minim relatîf par f, se f e je derivabil in x_0, alore*

$$f'(x_0) = 0.$$

Dimostrazion:
Se x_0 al è pont di massim relatîf, alore al esist un circondari $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ di x_0 alì che, par ogni numar reâl h che al è plui piçul in valôr assolût di δ, al risulte che

$$f(x_0) \geq f(x_0 + h).$$

Calcolìn cumò la derivade diestre e çampe di f in x_0:
(1) h al è positîf, alore

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

(2) h al è negatîf, alore

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Dal moment che in x_0 la funzion f e je derivabil, il limit diestri e chel çamp a àn di coincidi e duncje $f'(x_0) = 0$.

$\square$

Ricercje di asintots

Sierìn cheste piçule sezion tornant su la ricercje di eventuâi asintots de nestre funzion $f(x)$. Che e sedi $f(x)$ la nestre funzion, D il so insiemit di definizion, $r(x)$ un so eventuâl asintot e x_0 la assisse dal pont di tangjence di f e r. A son dôs pussibilitâts:

- x_0 al è finît. Dal moment che r al è, par ipotesi, un asintot di f, nus ven che r e je la rete de forme
$$x = x_0.$$
In chest câs si dîs che r al è un *asintot verticâl* di f. Notìn in plui che, pal stes motîf, x_0 nol parten a D e che $\lim_{x\to x_0} f(x)$ al è infinît.

- x_0 nol è finît. Alore x_0 no i parten a D. Che al sedi $r(x) = mx + q$. Duncje, pe definizion stesse di limit di funzion e di asintot, al varà di sei
$$\lim_{x\to\infty} f(x) - (mx + q) = 0$$
e cuindi
$$0 = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x) - mx + q}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} - m$$
e alore al varà di jessi[5]
$$\begin{aligned} m &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \\ q &= \lim_{x\to\infty} f(x) - mx. \end{aligned}$$
Se $m = 0$, si dîs che r al è un *asintot orizontâl* di f e al sarà de forme
$$r(x) = q$$
dulà che $q = \lim_{x\to\infty} f(x)$. Se m al è un gjeneric valôr finît, r al ven clamât *asintot oblicui* di f.

[5] Notìn che se $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ aplicant l'Hôpital al ven $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} f'(x)$. Se però la funzion no à limit o lu à finìt e pues vê distès un asintot, par esempli $f(x) = \sin(x^2)/x + x$ al à come asintot $r(x) = x$.

5.4 Esercizis

1. Verificâ che a valin

   (a) $e^x = 1 + x + x^2/2 + \ldots + x^n/n! + o(x^n)$

   (b) $\sin(x) = x - x^3/3! + x^5/5! - \ldots + (-1)^n x^{2n+1}/(2n+1)! + o(x^{2n+1})$

   (c) $\cos(x) = 1 - x^2/2 + x^4/4! - \ldots + (-1)^n x^{2n}/(2n)! + o(x^{2n})$

2. Calcolâ, doprant il teoreme di De l'Hôpital, i limits:

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\log(12x^4+1)}{x}$

   (b) $\lim_{x\to 0+} \frac{\log 15x}{\log 3x^2}$

3. Calcolâ i seguints limits

   (a) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)-x^2}{x\tan(x^5)}$

   (b) $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-e^{-x^2}}{\cos(x)-1}$

   (c) $\lim_{x\to 0} \frac{\exp\left(\frac{\sin(x)}{x}-1\right)}{x^2\sin(x)}$

   (d) $\lim_{x\to\pi/2} \frac{\sin(x)-1}{\cos(x)(e^x-\sqrt{e^\pi})}$

4. Dimostrâ che par ogni a, $b \in \mathbf{R}$ la funzion $f(x) = x^2 + ax + b$ no à asintots.

5. Cjatâ i asintots des funzions

   (a) $f(x) = \frac{3x^2+4x}{x+1}$

   (b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+4x+3}$

6. Studiâ lis funzions

   (a) $f(x) = x^4$

   (b) $f(x) = x^3 + 5$

   (c) $f(x) = x^3 - 3x$

7. Studiâ lis funzions seguintis:

   (a) $f(x) = \frac{x^3}{3(x+2)}$

   (b) $f(x) = \arcsin(\frac{2}{2+\cos x})$

   (c) $f(x) = \frac{x}{x^2+5}$

   (d) $f(x) = \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}}$

   (e) $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{x-2}}$

   (f) $f(x) = \frac{x \log x}{1+x}$

   (g) $f(x) = x \log |x-1|$

8. Dimostrâ che l'ecuazion $\cos x = x$ e à une uniche soluzion.

9. Dî tropis soluzions che a àn lis ecuazions seguintis:

$$\frac{\log x}{x} = 1/3, \quad xe^{-x^2/2} = 1/\sqrt{3}, \quad \arctan(xe^{1/x}) = 3/2.$$

Cjapitul 6

Teorie de integrazion

L'integrazion di funzions e rive a meti in corelazion doi problemis che a somein in prin une vore diferents: il calcul di areis (ancje no gjeometrichementri elementârs) e la ricercje di un operadôr inviers a chel di derivazion.

6.1 Integrazion seont Riemann

Scomencìn frontant il probleme dal calcul di areis. Che e sedi f une funzion definide sore l'interval $[a, b]$ de rete reâl. Par comoditât di resonament suponìn cha la nestre funzion e sedi a valôrs positîfs e domanìnsi trop che e vâl la aree che e sta sot dal grafic de funzion. Par calcolâle dividìn l'interval $[a, b]$ intune partizion P di n intervaluts $I_1, I_2, ..., I_n$ e, par ognidun di chescj, considerìn il massim e il minim de funzion (che o indicarìn in mût rispetîf cui simbui H_i e h_i) e segnìn cun a_i la lungjece di I_i. L'aree de regjon aprossimade cui minims e vignarà segnade cul simbul

$$\int_P f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i$$

e chê aprossimade cui massims le segnarìn cul simbul

$$\int^P f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} a_i H_i.$$

Che al sedi cumò $\mathcal{P}$ l'insiemit di dutis lis partizions dal interval $[a, b]$. Che a sedin $A = \{\int_P f(x)dx \,|\, P \in \mathcal{P}\}$ e $B = \{\int^P f(x)dx \,|\, P \in \mathcal{P}\}$. Al è facil di viodi che $\sup A \leq \inf B$. Di fat che a sedin P_1 e P_2 dôs partizions, e $P_{1,2}$ une partizion plui

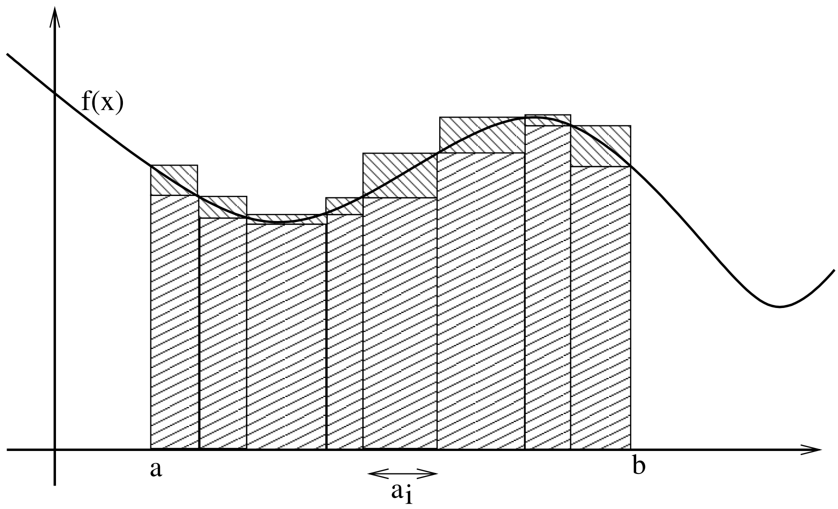


Figure 6.1: l'integrâl definît.

fisse di dutis dôs, alore al ven pulît che

$$\int_{P_1} f(x)dx \leq \int_{P_{1,2}} f(x)dx \leq \int^{P_{1,2}} f(x)dx \leq \int^{P_2} f(x)dx.$$

Cumò, se al sucêt che $\sup A = \inf B = k$, si dîs che la funzion f e je integrabil tal interval $[a, b]$ e si scrîf

$$\int_a^b f(x)dx = k.$$

Il valôr de nestre aree al ven clamât *integrâl definît di $f(x)$ in* $[a, b]$ e al sarà alore, par costruzion, compagn a k. Par definizion o segnarìn

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

No dutis lis funzion a son integrabilis. Un famôs esempli di funzion no integrabil al è chel de funzion di Dirichelet: la funzion γ di Dirichelet, definide sul interval $[0, 1]$, e vâl 0 par x che i parten a $[0, 1]$ e che al è un numar razionâl, e 1 par x che i parten a $[0, 1]$ e nol è un numar razionâl. Sielzude une cualsisei partizion P dal interval o varìn simpri che $\int^P \gamma(x)dx = 1$ e $\int_P \gamma(x)dx = 0$. ven a stâi γ no je integrabil.

6.2 Propietâts dai integrâi definîts

Teoreme 6.1 *Ogni funzion continue intun interval* $[a, b]$ *de rete reâl e je ancje integrabil in* $[a, b]$.

Dimostrazion:
Che e sedi f une funzion continue in $[a, b]$, par il teoreme di Heine-Cantor 3.3 alore f e sarà ancje uniformementri continue in $[a, b]$. Ven a stâi, par ogni sielte di un numar reâl positîf ϵ piçul a plasê, al esist un numar reâl δ tâl che se $|x_1 - x_2| < \delta$, alore $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$. Cjapìn in considerazion cumò une gjeneriche partizion P dal interval costituide di n intervaluts dal gjenar $I_i = [x_i, x_{i+1})$ cun $|x_{i+1} - x_i| < \delta$ e segnìn cun h_i e H_i in maniere rispetive il minim e il massim de funzion f tal intervalut I_i de nestre partizion. Al à di jessi $|H_i - h_i| < \epsilon$ e duncje

$$\int^P f(x)dx - \int_P f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} |x_{i+1} - x_i|(H_i - h_i) \leq (b - a)\epsilon.$$

Duncje par ϵ che al tint a zero nus ven la tesi.

□

Osservazion 6.2 *Une funzion che e je divierse di une funzion integrabil dome par numar finît di ponts e je ancje jê integrabil.*

Dimostrazion:
Di fat, se lis dôs funzion a son diferentis dome intun numar finît di ponts, cul tindi des partizions a jessi simpri plui fissis, la diference jenfri i integrâi superiôrs e inferiôrs e tint a zero.

□

Teoreme 6.3 *Che a sedin* f *e* g *dôs funzions integrabilis sore l'interval* $[a, b]$ *de rete reâl e* c *une costant, alore a valin lis formulis*

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f + g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

Dimostrazion:
(a) Che e sedi P une gjeneriche partizion dal nestri interval di integrazion. Alore

$$\int_P cf(x)dx = c\int_P f(x)dx$$

$$\int^P cf(x)dx = c\int^P f(x)dx.$$

Jessint $f(x)$ integrabil e ven la tesi.
(b) Che al sedi I un gjeneric intervalut de partizion P. Alore

$$\max_I f + \min_I g \geq \max_I (f+g).$$

Duncje al ven

$$\int^P f + \int^P g \geq \int^P (f+g)$$

e cun resonament analic nus ven

$$\int_P f + \int_P g \leq \int_P (f+g).$$

Dal moment che f e g a son integrabilis nus ven pulît la tesi.

□

6.3 Integrazion e derivazion

Teoreme 6.4 (teoreme fondamentâl dal calcul integrâl) *Che e sedi la funzion f integrabil e continue sore l'interval $[a,b]$ de rete reâl, e x un element di chest interval. Cun di plui segnìn*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Alore

$$F'(x) = f(x).$$

Dimostrazion:
Calcolìn il rapuart incrementâl de funzion $F(x)$:

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}.$$

Al è clâr che

$$\frac{1}{h}(h \cdot \min_{[a,b]} f(x)) \leq \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h} \leq \frac{1}{h}(h \cdot \max_{[a,b]} f(x)).$$

Duncje al esist un numar c_h che al fâs part dal interval $[x, x+h]$, tâl che

$$f(c_h) = \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}.$$

Di chê altre bande, cuant che h al tint a zero o vin che c_h al tint a x. Duncje

$$f(x) = \lim_{h\to 0} f(c_h) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t)dt}{h}.$$

Ven a stâi la tesi.

□

Definizion 6.5 *Che a sedin f e F dôs funzions definidis sul interval $[a,b]$ de rete reâl. Se $F'(x) = f(x)$ alore F si dîs* primitive *di f. L'insiemit di dutis lis primitivis al ven clamât* integrâl indefinît *de funzion f e si segne cul simbul*

$$\int f(x)dx.$$

Il teoreme 6.4 al è une vore impuartant parcè che nus dîs in buine sostance che l'operadôr integrazion al è inviers dal operadôr derivazion. Chest nus permet di calcolâ cun facilitât lis primitivis di un ciert numar di funzions fondamentâls.

Proposizion 6.6 *Se dôs funzions $F(x)$ e $G(x)$, definidis sul interval $[a,b]$ de rete reâl, a son dutis dôs primitivis de funzion $f(x)$, alore*

$$G(x) = F(x) + c$$

dulà che c e je une costant.

Dimostrazion:
Segnìn

$$F(x) - G(x) = H(x).$$

Alore, dal moment che F e G a son primitivis di f,

$$H'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Duncje, pal teoreme di Lagrange, aplicât tal interval $[a, x]$, o vin che al esist un element t dal nestri interval tâl che

$$H(x) - H(a) = H'(t)(x - a) = 0.$$

Duncje $H(x) = H(a)$ par ogni x che i parten a $[a, b]$, ven a stâi $H(x)$ e je la nestre costant c.

□

Duncje lis primitivis di une funzion a son infinidis, ma a diferissin dome par une costant.

Teoreme 6.7 (formule fondamentâl dal calcul integrâl) *Che e sedi F une primitive de funzion f definide sul interval $[a, b]$ de rete reâl e alì continue e integrabil. Alore*

$$\int_a^b f(t)dt = F(a) - F(b).$$

Dimostrazion:
Che al sedi p un pont dal interval di integrazion. Par 6.4, la funzion

$$G(x) = \int_p^x f(t)dt$$

e je une primitive di $f(x)$. Duncje par 6.6,

$$F(x) = G(x) + c$$

dulà che c e je une costant. Alore

$$F(b) - F(a) = \int_p^b f(t)dt + c - \int_p^a f(t)dt - c =$$

$$= \int_a^p f(t)dt + \int_p^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

ven a stâi la tesi.

□

Viodìn cumò une tecniche particolâr di integrazion, che e pues stâ ben cognossi:

Teoreme 6.8 (di integrazion par parts) *Che a sedin f e g dôs funzions derivabilis e integrabilis, alore*

$$\int fg' = fg - \int f'g.$$

Dimostrazion:
La derivade dal prodot e je

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

Duncje integrant di dutis dôs lis bandis o vin

$$fg = \int f'g + \int fg'.$$

ven a stâi la tesi.

□

6.4 Integrâi impropis

No ducj i câs di integrazion di funzions a rientrin te teorie de integrazion di Riemann. Par esempli ce sucedial se si cîr di integrâ une funzion intun interval infinît sicu $[a, \infty)$? La teorie di Riemann no rispuint a chestis domandis, o svilupar̀in alore un ampliament de nestre teorie che nus permeti di calcolâ (cuant che al è pussibil) chescj integrâi, che a vegnin clamâts impropis.

Definizion 6.9 *Che e sedi f une funzion definide suntun interval $[a, b)$ de rete reâl (eventualmentri al pues ancje jessi $b = \infty$), e integrabil in ogni interval $[a, t]$ cun $t < b$. Alore, la funzion f e ven clamade* localmentri integrabil *tal interval $[a, b]$. Cun di plui, par definizion,*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{t \to b} \int_a^t f(x)dx.$$

Se il limit al esist finît, si dîs che la funzion e je integrabil in mût impropi tal interval $[a, b]$.

Teoreme 6.10 *Che e sedi f une funzion no negative definide sore $[a, \infty)$. Alore, se*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) \neq 0$$

o vin che $\int_a^\infty f(x)dx$ al diverç.

Dimostrazion:
Dal moment che il limit di f par x che al va a l'infinît al è diferent di zero, al à di esisti un numar k positîf tâl che, par t numar finît avonde grant, al vâl

$$\int_a^t f(x)dx > \int_a^t kdx.$$

Alore, passant al limit par t che al tint a infinît, o vin che

$$\lim_{t\to\infty}\int_a^t kdx = k\lim_{t\to\infty}\int_a^t dx = k\lim_{t\to\infty}[x]_a^t = k\lim_{t\to\infty}(t-a) = \infty.$$

Duncje ancje l'integrâl di f su $[a,\infty)$ al à di diverzi.

$\square$

Teoreme 6.11 (dal confront) *Che e sedi f une funzion no negative, localmentri integrabil tal interval $[a,b]$ de rete reâl. Se e esist une funzion g no negative, integrabil in $[a,b]$, e cun $f \leq g$ in $[a,b)$, alore $\int_a^b f(x)dx$ al converç.*

Dimostrazion:
Al è clâr che, par ogni $t < b$, al vâl

$$0 \leq \int_a^t f(x)dx \leq \int_a^t g(x)dx.$$

Passant al limit, par t che al tint a b, nus ven la tesi.

$\square$

Teoreme 6.12 (dal confront asintotic) *Che e sedi f une funzion no negative, localmentri integrabil tal interval $[a,b]$ de rete reâl, e g une funzion definide in $[a,b)$ tâl che*

$$\lim_{x\to b}\frac{f(x)}{g(x)} = l$$

cun l numar positîf finît. Se $\int_a^b g(x)dx$ al converç, alore ancje $\int_a^b f(x)dx$ al converç.

Dimostrazion:
Par ipotesi nus ven che, par ogni sielte di ϵ reâl piçul a plasê, al esist un δ positîf tâl che, par ogni x che al diste di b mancul di δ, al vâl

$$-\epsilon \leq \frac{f(x)}{g(x)} - l \leq \epsilon.$$

Duncje

$$(l-\epsilon)g(x) \leq f(x) \leq (\epsilon + l)g(x).$$

Alore al è clâr che, par 6.11, se $\int_a^b g(x)dx$ al converç, alore al converzarà ancje $\int_a^b f(x)dx$.

$\square$

Osservìn, in mût analic, che se $\int_a^b g(x)dx$ al diverç, alore ancje $\int_a^b f(x)$ al diverç.

Teoreme 6.13 *Che e sedi f une funzion no negative definide su $[a, \infty)$. Se $\int_a^\infty f(x)dx$ al converç, alore*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Dimostrazion:
Se, par assurt, nol fos cussì, e duncje

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l \neq 0$$

al sarès

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{l} = 1.$$

Ma, par 6.12, $\int_a^\infty f(x)dx$ al varès di diverzi. E chest al va cuintri lis nestris ipotesis.

□

Teoreme 6.14 (dal valôr assolût) *Che e sedi f une funzion localmentri integrabil tal interval $[a, b]$ de rete reâl. Se $\int_a^b |f(x)|dx$ al converç, alore ancje $\int_a^b f(x)dx$ al converç.*

Dimostrazion:
Che e sedi $f^+(x)$ la funzion (clamade part positive di f) che e vâl $|f(x)|$ dulà che f e je positive, e zero inaltrò. In maniere analoghe, che e sedi $f^-(x)$ la funzion (clamade part negative di f) che e vâl $|f(x)|$ dulà che f e je negative e zero inaltrò. Al è clâr che

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x).$$

Cun di plui $|f(x)| \geq f^+(x)$ e $|f(x)| \geq f^-(x)$, duncje se al converç $\int_a^b |f(x)|$ a àn di converzi ancje i integrâi impropis de part positive e de part negative di f. Alore, dal moment che

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx$$

o vin la tesi.

□

6.4.1 Tabele di integrazion

Ve chi un ristret des primitivis di funzions fondamentâls:

1. $\int ax^b dx = a\,\frac{x^{b+1}}{b+1} + c$

2. $\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$

3. $\int e^x dx = e^x + c$

4. $\int \sin x\,dx = -\cos x + c$

5. $\int \cos x\,dx = \sin x + c$

6. $\int \sin^2 x\,dx = \frac{x - \cos x \sin x}{2}$

7. $\int \cos^2 x\,dx = \frac{x + \cos x \sin x}{2}$

8. $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \int (1 + \tan^2 x)\,dx = \tan x + c$

9. $\int \tan x\,dx = -\log|\cos x| + c$

10. $\int \frac{1}{\sqrt{k^2 - x^2}}\,dx = \arcsin\frac{x}{k} + c$

11. $\int \frac{-1}{\sqrt{k^2 - x^2}}\,dx = \arccos x + c$

12. $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x + c$

6.5 Esercizis

1. Che e sedi f une funzion a valôrs reâi definide su un sotinsiemit di $\mathbf{R}$ e li derivabil. Che e sedi
$$g(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Dimostrâ che
$$\int g(x)dx = \log|f(x)| + c.$$

2. Dimostrâ che l'integral notevul
$$\int (\tan x)dx$$
al à par primitive chê ripuartade in tabele.

3. Dimostrâ, doprant l'integrazion par parts, che i integrâi notevui
$$\int \sin^2 x dx, \qquad \int \cos^2 x dx.$$
a àn lis primitivis ripuartadis in tabele.

4. Calcolâ lis primitivis dai integrâi seguints
   (a) $\int (x^5 + 3x^2 + 37x + 2)\, dx$
   (b) $\int xe^{x^2} dx$
   (c) $\int x \log(x) dx$
   (d) $\int \sin(x)\cos(x) dx$
   (e) $\int [\sin(3x+2) + e^{5x}] dx$
   (f) $\int \frac{x^2+1}{x^3+3x+15} dx$
   (g) $\int \frac{1}{x^2+2x+2} dx$
   (h) $\int \frac{1}{\sqrt{x(2-x)}} dx.$

5. Calcolâ il valôr dai integrâi
   (a) $\int_0^1 \frac{2}{4x^2+4x+1} dx$
   (b) $\int_1^2 \frac{x^4-2x^3+4x^2-6x+1}{x^3+3x} dx$

6. Calcolâ il valôr de aree determinade dal as des assissis e de funzion

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

tal interval $[0, 2]$ de rete reâl.

7. Calcolâ, doprant l'integrazion par parts,

$$\int xe^x dx.$$

8. Calcolâ la derivade des funzions

   (a) $f(x) = \int_0^x \sin(t^2)dt$

   (b) $f(x) = \int_x^5 e^{-t^2} dt$

   (c) $f(x) = \int_{-x}^{2+x} \tan(\log(t))dt$

   (d) $f(x) = \int_{-x^2}^{e^x} \sin(\cos(t))dt$

9. Calcolâ

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\int_0^x \arctan(t^2)dt}{x}.$$

10. Dî par cuâi $\alpha \in \mathbf{R}$ l'integrâl $\int_0^1 x^\alpha dx$ al converç e par cuâi $\alpha \in \mathbf{R}$ l'integrâl $\int_1^{+\infty} x^\alpha dx$ al converç.

11. Calcolâ, se al esist, l'integrâl

$$\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{|\sin x|^{\frac{1}{2}}} dx.$$

12. Studiâ la funzion

$$F(x) = x \int_0^x \frac{t^2}{e^{t^2}} dt.$$

13. Determinâ se a converzin i integrâi

$$\int_0^\infty \frac{\log x}{e^{x^2}} dx, \qquad \int_{-\infty}^0 \frac{x^2 e^{3x}}{2} dx.$$

Cjapitul 7

La teorie des seriis numerichis

Considerìn une sucession a_n cun tiermins reâi. La sume S_N dai prins N tiermins e ven clamade sume parziâl N-esime di a_n:

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n.$$

La sucession des sumis parziâls e ven clamade *serie* associade ae sucession a_n. Par definizion o vin che

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{N \to \infty} S_N.$$

Se il limit al è finît, si dîs che la serie e converç.

Proposizion 7.1 *Se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ e converç, alore a_n e tint a zero par n che al tint a infinît.*

Dimostrazion:
Di fat al è

$$a_{N+1} = S_{N+1} - S_N.$$

Alore

$$\lim_{N \to \infty} a_{N+1} = \lim_{N \to \infty} S_{N+1} - \lim_{N \to \infty} S_N = 0.$$

Ven a stâi la tesi.

□

7.0.1 La serie gjeometriche

Che al sedi x un numar reâl, alore la sô serie gjeometriche associade e je

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + ...$$

Il limit de sucession associade x^k al è diverzint se $|x|$ al è plui grant in mût strent di 1, al è 1 se $x = 1$ e nol esist se $x = -1$, ducje par chescj valôrs di x la serie gjeometriche e diverç. Suponìn alore che $|x| < 1$. La sume parziâl n-esime e sarà

$$S_n = 1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Parcè che nus ven de algjebre la formule

$$(1 - x^n) = (1 - x)(1 + x + ... + x^n).$$

Alore

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1}{1 - x}$$

cuant che $|x| < 1$. Duncje in struc

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x} \qquad (|x| < 1).$$

7.1 Seriis cun tiermins no negatîfs

A son chês seriis dulà che la sucession di partence e à ducj i tiermins no negatîfs. Al è clâr che lis seriis no negativis a son ancje sucessions monotonis cressintis, e duncje a àn simpri limit, finît o ben infinît. Un esempli classic di serie no negative e je la serie seguint:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{k+1} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + ...$$

Calcolìn il limit de sucession associade

$$\lim_{k \to \infty} \frac{k}{k+1} = 1.$$

Duncje par 7.1 la serie e je diverzint.

7.1.1 Criteris di convergjence: il criteri dai integrâi

Teoreme 7.2 (criteri dai integrâi) *Che e sedi* $\sum_n^\infty a_n$ *une serie a tiermins positîfs,* c *un numar naturâl, e* $f(x)$ *une funzion definide sul interval* $[c, \infty)$*, continue, monotone e decressint, tâl che*

$$f(k) = a_k$$

par ogni k *numar naturâl plui grant o compagn di* c*. Alore, la serie e converç se e dome se*

$$\int_c^\infty f(x)dx < \infty.$$

Dimostrazion:
Al è clâr che, par k numar naturâl plui grant di c, al vâl

$$a_{k-1} \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq a_k.$$

Ven a stâi

$$\int_c^\infty f(x)dx \leq \sum_{n=c}^\infty a_n \leq \int_{c-1}^\infty f(x)dx$$

Di cheste relazion e ven pulît la nestre tesi.

□

7.1.2 Lis seriis armoniche e armoniche gjeneralizade

Considerìn cumò la serie

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k}$$

che e je clamade *serie armoniche.* Doprant 7.2 nus ven che

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = \lim_{t\to\infty}[\log|x|]_1^t = \lim_{t\to\infty} \log|t| = \infty$$

duncje, la serie armoniche e diverç.

La serie armoniche e pues jessi gjeneralizade par mieç di un parametro reâl p diferent di 1:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{x^p}.$$

Doprant ancje chi 7.2 nus ven:

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^p}dx = \lim_{t\to\infty}\int_1^t \frac{x^{1-p}}{1-p} = \lim_{t\to\infty}\frac{t^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}$$

se $p < 1$ l'integrâl al diverç, se invezit $p > 1$ l'integrâl al converç e par consecuence ancje la serie.

7.1.3 Altris criteris di convergjence

Teoreme 7.3 (criteri dai infinitesims) *Che e sedi a_n une sucession a tiermins no negatîfs. Che al sedi p un numar reâl tâl che*

$$\lim_{n\to\infty} n^p a_n = l$$

cun l stretamentri positîf e finît. Alore:
1) se $l > 1$, la serie $\sum_n^\infty a_n$ e converç.
2) se $l \leq 1$, la serie $\sum_n^\infty a_n$ e diverç.

Dimostrazion:
1) Pes ipotesis, al à di esisti un numar naturâl N tâl che, par $n > N$, al vâl

$$|n^p a_n - l| < 1$$

ven a stâi

$$0 \leq a_n \leq \frac{l+1}{n^p}$$

duncje, dal moment che par $p > 1$ o vin che la serie

$$\sum_n^\infty \frac{l+1}{n^p}$$

jessint une serie armoniche gjeneralizade, e à di converzi, nus ven ancje che la serie $\sum_n^\infty a_n$ e converç.
2) In mût analic al à di esisti un numar naturâl N' tâl che, par $n > N'$, nus ven

$$|n^p a_n - l| < \frac{l}{2}.$$

Ven a stâi

$$\frac{l}{2n^p} < a_n.$$

Alore, dal moment che $p \leq 1$ la serie

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{l}{2n^p}$$

e je diverzint e duncje $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e diverç.

□

Teoreme 7.4 (criteri dal rapuart) *Che e sedi a_n une sucession a tiermins positîfs, e*

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l.$$

Alore la serie associade

$$\sum_{n}^{\infty} a_n$$

e converç se $l < 1$, e invezit e diverç se $l > 1$.

Dimostrazion:
Fissât un numar reâl ϵ piçul avonde par che al sedi $|l - 1| > \epsilon$, al à di esisti un indiç naturâl N tâl che, par $n > N$, al ven

$$l - \epsilon \leq \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq l + \epsilon.$$

Che al sedi alore k un numar naturâl plui grant di N:
1) Che al sedi $l > 1$, alore, par ogni sielte di t numar naturâl, o vin

$$a_{k+t} \geq a_{k+t-1}(l - \epsilon) \geq a_{k+t-2}(l - \epsilon)^2 ... \geq (l - \epsilon)^t a_k.$$

Duncje al risulte

$$\sum_{n=t}^{\infty} a_{k+n} \geq \sum_{n=t}^{\infty} (l - \epsilon)^n a_k.$$

Il secont membri de disecuazion al diverç parcè che al è une serie gjeometriche cun $l - \epsilon > 1$.

2) Che al sedi invezit $l < 1$, alore, in mût dal dut analic, par ogni sielte di t numar naturâl, o vin che

$$a_{k+t} \leq (l + \epsilon)^t a_k.$$

Duncje al salte fûr che

$$\sum_{n=t}^{\infty} a_{k+n} \leq \sum_{n=t}^{\infty} (l + \epsilon)^n a_k.$$

Cheste volte il secont membri de disecuazion al converç, parcè che $(l + \epsilon) < 1$.

□

Atenzion: se al sucêt che

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 1$$

no savìn dî nuie dal compuartament de serie associade. Ve doi esemplis une vore significatîfs: la serie armoniche

$$\sum_n^\infty a_n = \sum_n^\infty \frac{1}{n}$$

e diverç, come che o vin viodût, ma

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^{-1}}{(n+1)^{-1}} = 1.$$

Di chê altre bande, la serie armoniche gjeneralizade

$$\sum_n^\infty a_n = \sum_n^\infty \frac{1}{n^2}$$

e converç e o vin simpri

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1.$$

Teoreme 7.5 (criteri de lidrîs) *Che e sedi a_n une sucession no negative e che al sedi*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$$

cun l diferent di 1. Alore, la serie associade e converç se $l < 1$ e e diverç se $l > 1$.

Dimostrazion:
La dimostrazion e je simile a chê di 7.4. Di fat che al sedi ϵ un numar reâl tâl che

$$|l-1| > \epsilon.$$

Alore, al esist un indiç N che, par $n > N$, al vâl

$$|\sqrt[n]{a_n} - l| \leq \epsilon$$

ven a stâi

$$(l-\epsilon) \leq \sqrt[n]{a_n} \leq (l+\epsilon).$$

Che al sedi k un numar naturâl plui grant di N, e $l > 1$. Duncje nus ven che $(l-\epsilon) > 1$, alore

$$(l-\epsilon)^k \geq a_k.$$

Duncje al risulte
$$\sum_{n=k}^{\infty}(l-\epsilon)^k \leq \sum_{n=k}^{\infty} a_k.$$
Cumò il prin membri de disecuazion al diverç, parcè che si trate di une serie gjeometriche cun $(l-\epsilon) > 1$, duncje la serie associade ae nestre sucession e diverç.

Il câs $l < 1$ si fâs in mût analic doprant la disecuazion
$$\sqrt[n]{a_n} \leq (l+\epsilon).$$
Al ven che, par k plui grant di N,
$$a_k \leq (l+\epsilon)^k$$
ven a stâi
$$\sum_{n=k}^{\infty} a_k \leq \sum_{n=k}^{\infty}(l+\epsilon)^k$$
ma cheste volte il secont membri de disecuazion al converç, par vie che $(l+\epsilon) < 1$.

□

Atenzion: tal câs che $l = 1$ no savìn nuie dal compuartament de funzion.

Teoreme 7.6 (criteri dal confront asintotic) *Che e sedin a_n e b_n dôs sucessions no negativis. Cun di plui che al sedi*
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = l$$
cun l positîf in mût strent e finît. Alore, il compuartament de serie associade ae sucession a_n al è chel stes de serie associade a b_n.

Dimostrazion:
Fissât un ϵ piçul a plasê, par n plui grant di un ciert valôr N, o vin che
$$\left|\frac{a_n}{b_n} - l\right| \leq \epsilon.$$
Che al sedi k un numar naturâl plui grant di N, alore nus ven che
$$(l-\epsilon)b_k \leq a_k \leq (l+\epsilon)b_k$$

passant aes seriis associadis, nus ven

$$\sum_{n=k}^{\infty} b_k(l-\epsilon) \leq \sum_{n=k}^{\infty} a_k \leq \sum_{n=k}^{\infty} b_k(l+\epsilon).$$

Ven a stâi la tesi.

□

7.2 Lis seriis a segn alterni

Lis seriis a segn alterni, a son chês seriis dulà che no son plui vincui di positivitât sul segn di ogni singul element de sucession. Ta chestis seriis o vin une alternance di tiermins positîfs e negatîfs. Ve chi un esempli di serie a segn alterni.

7.2.1 La serie telescopiche

La *serie telescopiche* o ben *di Mengoli*, si costruìs a partî di une sucession b_n che e tint a di un limit finît l. Che e sedi par definizion

$$a_n = b_{n+1} - b_n.$$

La serie telescopiche e je la serie associade ae nestre sucession a_n. Alore o vin

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty}(b_{n+1} - b_n) = \lim_{N\to\infty}(b_{N+1} - b_N + b_N - ... - b_0) = l - b_0.$$

7.2.2 Un criteri di convergjence pes seriis alternis

Teoreme 7.7 (di Leibnitz) *Che e sedi a_n une sucession a tiermins positîfs che e tint a zero e che je decressint definitivementri (ven a stâi di un ciert indiç indevant). Alore la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + ...$$

e converç a un ciert valôr finît S. Cun di plui o vin che

$$|S_n - S| < a_{n+1}.$$

Ven a stâi o sin bogns di dâ une stime dal erôr che o fasìn aprossimant la serie cuntune sume parziâl.

Dimostrazion:
Che al sedi k un numar naturâl avonde grant. Alore

$$S_{2k+2} = S_{2k} + (a_{2k+1} - a_{2k+2})$$

duncje la sucession des sumis parziâls pârs e je cressint. Di chê altre bande

$$S_{2k+1} = S_{2k-1} - (a_{2k} - a_{2k+1})$$

e duncje la sucession des sumis parziâls dispars e je decressint. Cun di plui o vin che

$$S_{2k+1} - S_{2k} = a_{2k+1} \geq 0$$

duncje al risulte

$$S_{2k+1} \geq S_{2k} \geq S_2$$

ven a stâi la sucession S_{2k+1} al variâ di k e je decressint e inferiormentri limitade, duncje e converç. La sucession S_{2k} e je cressint e superiormentri limitade dal limit de sucession dispar S_{2k+1}, duncje e à di converzi. Lis dôs sucession a converzin al stes limit, di fat

$$\lim_{k\to\infty} S_{2k+1} - \lim_{k\to\infty} S_{2k} = \lim_{k\to\infty} a_{2k+1} = 0.$$

Alore al risulte che

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = \lim_{k\to\infty} S_{2k+1} = \lim_{k\to\infty} S_{2k} = S.$$

Par tant, o vin che $S_{2k} \leq S \leq S_{2k+1}$, par ogni k numar naturâl avonde grant. Din cumò une stime dal erôr che o fasìn aprossimant S cun S_n:

$$0 \leq S - S_{2k} \leq S_{2k+1} - S_{2k} = a_{2k+1}$$

$$0 \leq S_{2k+1} - S \leq S_{2k+1} - S_{2k+2} = a_{2k+2}$$

ven a stâi e vâl la formule

$$|S - S_n| \leq a_{n+1}.$$

□

Un esempli di serie alterne dulà che si pues doprâ il criteri di Leibnitz e je la *serie armoniche a segn alterni*:

$$\sum_{n=1}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}.$$

Che cheste serie e converç al ven pulît di 7.7. Une sô stime, a mancul di un erôr di 0.25, e je la sume dai prins trê tiemins:

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6} = 1.8333...$$

7.3 La convergjence assolude

Definizion 7.8 *Che e sedi a_n une sucession cun segn cualsisei. La sucession dai valôrs assolûts di a_n e ven segnade cul simbul $|a_n|$. Se la serie associade*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

e converç, si dîs che la serie $\sum_n^{\infty} a_n$ e je converzint in mût assolût.

La convergjence assolude e je peade ae convergjence ordenarie dal impuartant teoreme che al seguìs.

Teoreme 7.9 *Une serie che e converç in mût assolût e converç.*

Dimostrazion:
Considerìn la sucession a_n e di cheste o costruìn altris dôs sucessions. La prime, che o segnarìn cun a_n^+, e je clamade *part positive* di a_n, e e vâl a_k, cuant che a_k al è positîf e zero inaltrò. La seconde, che o segnarin cun a_n^-, e je clamade *part negative* di a_n, e e vâl $-a_k$, cuant che a_k al è negatîf, e zero inaltrò. Alore al risulte che

$$a_n = a_n^+ - a_n^- \qquad \text{e duncje} \qquad S_N = S_N^+ - S_N^-.$$

Cun di plui nus ven che

$$0 \leq a_n^+ \leq |a_n| \qquad \text{e ancje} \qquad 0 \leq a_n^- \leq |a_n|$$

par ogni valôr dal indiç n. Alore o vin che

$$\sum_n^{\infty} a_n^+ \leq \sum_n^{\infty} |a_n| \qquad \text{e} \qquad \sum_n^{\infty} a_n^+ \leq \sum_n^{\infty} |a_n|.$$

Jessint che la serie

$$\sum_n^{\infty} |a_n|$$

e converç par ipotesi, e visantsi che

$$\lim_{N\to\infty} S_N = \lim_{N\to\infty} S_N^+ - \lim_{N\to} S_N^-$$

nus ven la tesi.

□

Par esempli la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

e je converzint in mût assolût e duncje e converç.

7.4 Esercizis

1. Studiâ il caratat des seriis

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2 - 2n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin(1/n),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin(n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} (\cos(1/n) - 1).$$

2. Studiâ il caratat des seriis

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin(n), \quad \sum_{n=1}^{\infty} \exp \frac{1}{n} - n,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 e^{\frac{1}{n}} - (n+1)n)^n.$$

Bibliografie

[1] T.M.Apostol: *Calculus*, Wiley and Sons, New York, (1969).

[2] R.Ferrauto: *Elementi di Analisi Matematica*, Alighieri, Perugia, (1989).

[3] G.Prodi: *Analisi Matematica*, Bollati Boringhieri, Torino, (1992).

[4] P.Marcellini-C.Sbordone: *Esercitazioni di matematica*, Liguori, Napoli, (1989).

Riferiments bibliografics pe terminologjie

[NM] A.M.Pittana-G.Mitri-L.De Clara: *La nomencladure des matematichis*, Codroip, Istitût ladin furlan Pre Checo Placerean, (1997).

[L2000] inserts *Lenghe2000: Algjebre, Analisi Matematiche, Gjeometrie*, edizions di *La Patrie dal Friûl* (par cure di A.Pittana, D.Toffoli, V.Spizzamiglio, V.Roiatti, X.Lamuela, A.Ceschia, L.Croattini, S.Fantini), Udin, (1990-1992)

[L] X.Lamuela: *Su la codificazion e il completament dal vocabolari furlan*, Udin, edizions di *La Patrie dal Friûl*, (1991).

Ringraziaments: Grazie a ducj chei che nus àn judât in cualsisei mût te realizazion di chest progjet, in particolâr pal fondamentâl aiût in fase di publicazion, a Licio De Clara, a Carli Pup e Sandri Carrozzo.
Un ringraziament speciâl a Fabrizio Barbarino pe sô consulence informatiche. In fin graziis a l'*Istitût ladin furlan Pre Checo Placerean* e ae *Societât Sientifiche e Tecnologjiche Furlane*.

Une introduzion ae Analisi Matematiche al è un test che al ilustre, in mût sintetic, i risultâts fondamentâi di un prin cors di analisi. I arguments frontâts a son: spazis metrics e topologjics, sucessions sore spazis metrics, continuitât e limits di funzions, derivadis, studi di funzions reâls, teorie de integrazion, teorie des seriis numerichis.

Matteo Fogale al è nassût a Udin tal 1973. Si è laureât in matematiche tal 1997 ae Universitât di Udin cuntune tesi in Algjebre. Al à frecuentât i cors organizâts dal O.L.F e de Universitât di Udin par tradutôrs in lenghe furlane. Al à insegnât fisiche intal liceu sientific di Glemone, dulà che al à ancje colaborât ae realizazion di cors extracuriculârs di lenghe furlane. Al lavore a Udin come analist programadôr.

Emanuele Paolini al è nassût a Udin tal 1973. Si è laureât in matematiche tal 1996 ae Universitât di Pisa cuntune tesi in Analisi. Tal 1997 al à conseguît il diplome di licenze ae "Scuola Normale Superiore" di Pisa. Al lavore come ricercjadôr ae Universitât di Firenze. Il so cjamp di ricercje al è chel de Teorie Gjeometriche de Misure.

ISTITÛT LADIN FURLAN
"Pre Checo Placerean"